侯振挺

Q过程的唯一性准则

CRITERIA FOR THE UNIQUENESS OF Q-PROCESSES

侯振挺

Q过程的唯一性准则

湖南科学技术出版社

Q过程的唯一性准则

侯 振 挺

责任编辑：胡海清

■

湖南科学技术出版社出版

（长沙市展览馆路14号）

湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷

■

1982年7月第1版第1次印刷

开本：850×1168毫米 1/32　印张：5.125　插页：7　字数：119,000

印数：1——3,500

统一书号：13204·58　定价：1.25元

内 容 简 介

本书以讨论"Q过程的唯一性准则"为核心，介绍了Q过程构造论的基本理论。它主要包括Q过程的拉氏变换的特征，Q过程、B型Q过程以及F型 Q过程的存在定理和唯一性准则。

读者对象为理工科大学高年级学生、教师和概率论工作者。

出版说明

侯振挺教授曾于一九七四年，在《中国科学》上发表了题为《Q过程的唯一性准则》的论文。一九七八年，戴维逊基金会的主席、英国皇家学会会员 P·肯德尔向侯振挺颁发了“戴维逊纪念奖”，并给我国科学院写信表示祝贺。

信中写道：“长沙铁道学院的侯振挺，在所谓Q过程的存在问题中建立了唯一性准则。鉴于这一非凡的工作，本基金会决定授于他一项戴维逊奖金。马尔可夫过程现在在物理学、生物学和社会科学的各个分支都有许多应用。因此，自然需要为此建立一门完整的一般理论。四十多年来，数学家们非常关心这个问题。他们多次作了特别的努力，以寻求唯一性问题的答案。但是，直到这位天才的年轻人发表他的论文以前，所有的努力都失败了。由于语言上的困难，我们国内对他的工作不是全部了解的．但是，他的杰出论文‘Q过程的唯一性准则’，以英文的形式发表在你们的《中国科学》杂志上，引起了广泛的注意，这是因为他的答案具有完整性和最终性。”

近几年来，侯振挺对“Q过程”又作了深入的研究，

取得一些新的成果。在此基础上，侯振挺又经过深思熟虑，将他对Q过程研究所取得的成果条理化、系统化、通俗化，撰写成《Q过程的唯一性准则》的专著。我们相信，侯振挺的这本著作的出版发行，必将受到中外科学界的重视和欢迎，一定会对概率论的发展起促进作用。

一九八二年四月

目　录

作者序

1974年《中国科学》第二期上发表了作者的题为“Q 过程的唯一性准则”的一篇短文。之后，该文获得1978年度英国R·戴维逊纪念奖。后来，有不少同志来信或来访，询问它的内容、意义及其他有关情况。由于这个问题当时是以论文形式发表的，它的对象是概率论专家，起点较高，因此根本没有考虑如何写才能使读者易于接受。加之后来工作忙，没有再去琢磨它，所以对同志们所提出的问题一时很难回答清楚。但这却促使我去理出个尽可能初等的证明。经过一段时间的努力，自认为算是达到了预期的目的，写成了这本书，作为对关心这个课题及作者本人的同志的回答和谢意，并以此纪念英国杰出的概率论专家——已故的R·戴维逊博士。

书中所讨论的问题虽是概率论中一个有名的题目，但我们的陈述和证明却不涉及任何概率论内容。只要具备微积分、一些实变函数以及矩阵的记号和运算规则等方面的知识，就能把这本书完全看懂。因此，我们的证明是初等和纯分析的。当然，通俗易懂也是作者在写作过程中始终不渝的目标，但是我不敢说是完全达到了。

本书可作为理工科大学生的科研小组的阅读材料。对于学过实变函数的数学专业的学生来说，能完全读懂它；对于工科

各专业的学生来说，只要承认实变函数论中的几个定理（在本书中都已列出），也可无困难地掌握本书内容，书中通过对“Q过程的唯一性准则”的研究，把Q过程构造论的逻辑基础和基本结果都作了完整的陈述和严格的证明，所以它也可以作为概率论工作者清理这方面的基本概念和基础理论之用。

本书也包括了作者自己的一些未发表的研究成果。例如定理3.5.1在以前是没有认真证明过的，这次给出了既严格又简单的证明。

最后，说明一个约定：在证明中，例如我们引用定理1、定理1.3及（3.3.2）分别指同节的定理1、同章第一节的定理3及第三章第三节中的公式（2）。

杨向群教授和陈木法同志仔细地阅读了本书的底稿并提出了不少改进意见，谨致谢意。

由于作者学识浅薄，错误和不当之处在所难免，敬请同志们指正。

侯 振 挺

一九七九年八月初稿

一九八一年十月定稿

提　要

设$E=(0,1,\cdots)$为一可列集．所谓一个马尔可夫过程(以下简称马氏过程或过程)是指具有下列性质的一组实值函数$p_{ij}(t)$，$(i,j\in E,\ t\geqslant 0)$：

$$p_{ij}(t)\geqslant 0,\quad \sum_{j\in E}p_{ij}(t)\leqslant 1. \tag{1}$$

$$\sum_{k\in E}p_{ik}(t)p_{kj}(s)=p_{ij}(t+s), \tag{2}$$

$$\lim_{t\to 0}p_{ij}(t)=q_{ij}(0)=\delta_{ij}. \tag{3}$$

其中$\delta_{ii}=1$，$\delta_{ij}=0\ (i\neq j)$。可以证明，极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t}=q_{ij} \tag{4}$$

存在[1)]，而且

$$0\leqslant q_{ij}<+\infty\ (i\neq j),\quad 0\leqslant -q_{ii}\leqslant +\infty$$

$$\sum_{j\in E}q_{ij}\leqslant 0 \tag{5}$$

1) 为了节省篇幅，同时也不致影响本书提出的任务，在第一章中证明了$p'_{ii}(0)$的存在性，而后在$-p'_{ii}(0)<+\infty$的限制下证明了$p'_{ij}(0)(i\neq j)$的存在性和有限性。其实，$-p'_{ii}(0)<+\infty$这个限制是可以解除的。

当$-q_{ii}<+\infty$ ($i\in E$)时，称过程是可微的。简称$Q=(p_{ij})$为过程的密度矩阵，而$(p_{ij}(t))$则简称为Q过程，以表示它与Q有(4)的关系。为了行文的方便，我们把满足(5)式及$-q_{ii}<+\infty$ ($i\in E$)的一个矩阵$Q=(q_{ij})$叫做Q-矩阵，若还有

$$\sum_{j\in E} q_{ij}=0 \qquad (i\in E),$$

则称Q为保守的Q-矩阵。于是每个可微的马氏过程的密度矩阵是Q-矩阵。反过来，我们不禁要问：先给定一个Q-矩阵，1) 我们能否找到一个可微的马氏过程，使它的密度矩阵恰好等于这个预先给定的Q-矩阵，即能否找到一个Q过程呢？这就是Q过程的存在性问题；2) 如果Q过程存在，那么恰好存在一个的充要条件是什么？这就是Q过程的唯一性问题。早在1945年，第一个问题已经解决，其答案可陈述为如下的定理：

定理1 (Q过程存在定理) 对任给的一个Q-矩阵，Q过程总存在。

关于第二个问题，于最近（1974年）才彻底解决[8]，其答案可陈述为如下的定理：

定理2 (Q过程的唯一性准则) 设任给一个Q-矩阵，则恰好存在一个Q过程的充要条件是下列两条件同时成立：

$$\text{i)}\qquad \inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)>0,\quad 0<\lambda<+\infty, \tag{6}$$

其中$\varphi_{ij}(\lambda)$由Q-矩阵按如下方式唯一决定：

$$\left.\begin{aligned} &f_{ij}^{(0)}(t)=\delta_{ij}e^{-q_i t}\\ &f_{ij}^{(n+1)}(t)=\sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i(t-s)}q_{ik}f_{kj}(s)ds,\ (n\geqslant 0)\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$f_{ij}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_{ij}^{(n)}(t). \tag{8}$$

$$\varphi_{ij}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}f_{ij}(t)dt. \tag{9}$$

ii) Q保守且方程

$$\left.\begin{aligned}&\lambda u_i-\sum_{k\in E}q_{ik}u_k=0,\\&0\leqslant u_i\leqslant 1,\ (\lambda>0, i\in E)\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

只有零解，或方程

$$\left.\begin{aligned}&\lambda\eta_j-\sum_{k\in E}\eta_k q_{kj}=0,\\&0\leqslant\eta_j,\quad\sum_{j\in E}\eta_j<+\infty,(\lambda>0, j\in E)\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

只有零解。

这本书的主要目的是用纯分析而又初等的方法，严格证明定理2。除此而外，本书还完成了下列三个任务：1）顺便（也是为了证明定理2的需要）给出了定理1的证明；2）给出了B型和F型Q过程（定义见本书第一章§7）的存在性定理和唯一性准则；3）对Q过程构造论的理论基础进行了整理，而且处理方式与前人不同。以前多以泛函分析中的半群理论为工具，而我们则只用到数学分析和实变函数论的知识。所以本书可以作为研究Q过程入门之用。

第 1 章

问题的提出

§1 马尔可夫过程的定义

设$E=(0, 1, \cdots)$为一可列集。所谓一个马尔可夫过程(以下简称为马氏过程或过程),是指具有下列性质的一组实值函数$p_{ij}(t)(i, j\in E, t\geqslant 0)$:

$$p_{ij}(t)\geqslant 0, \quad \sum_{j\in E} p_{ij}(t)\leqslant 1; \tag{1}$$

$$\sum_{k\in E} p_{ik}(t)p_{kj}(s)=p_{ij}(t+s); \tag{2}$$

$$\lim_{t\to 0} p_{ij}(t)=p_{ij}(0)=\delta_{ij}. \tag{3}$$

其中,$\delta_{ij}=0$,$(i\neq j)$,$\delta_{ii}=1$。若还有

$$\sum_{j\in E} p_{ij}(t)=1 \quad (i, j\in E, t\geqslant 0),$$

则称为诚实的马氏过程。

§2 $p_{ij}(t)$的连续性

定理1 设$(p_{ij}(t))$是一个马氏过程,则对于任意的$t\geqslant 0$,

$t'\geqslant 0$和一切i，$j\in E$有

$$|p_{ij}(t)-p_{ij}(t')|\leqslant 1-p_{ii}(t-t')。\qquad (1)$$

于是，由(1.3) 知，$P_{ij}(t)$在$[0,\infty)$上一致连续。

证 不妨设$t\geqslant t'\geqslant 0$，令$h=t-t'\geqslant 0$。于是(1) 变成

$$|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)|\leqslant 1-p_{ii}(h)。$$

根据(1.2)得

$$|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)|=\left|\sum_{k\in E}p_{ik}(h)p_{kj}(t)-p_{ij}(t)\right|$$

$$=\left|(p_{ii}(h)-1)p_{ij}(t)+\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)p_{kj}(t)\right|$$

$$=\left|\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)p_{kj}(t)-(1-p_{ii}(h))\,p_{ij}(t)\right|$$

$$\leqslant\max_{i\in E}\left(\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)p_{kj}(t),\quad (1-p_{ii}(h))p_{ij}(t)\right)$$

$$\leqslant\max_{i\in E}\left(\sum_{k\neq i}p_{ik}(h),\ (1-p_{ii}(h)\right)$$

$$=1-p_{ii}(h)。$$

定理得证。

§3 $p'_{ii}(0)$的存在性

定理1 对于任意的$i\in E$，极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-p_{ii}(t)}{t}=-p'_{ii}(0)\qquad (1)$$

存在，但可能为$+\infty$。

证 由(1.1)和(1.2)得

$$p_{ii}(t+s)\geqslant p_{ii}(s)p_{ii}(t)。\qquad (2)$$

由(1.1)、(1.3)和(2)知

$$0<p_{ii}(t)\leqslant 1 \quad (t\geqslant 0)。 \tag{3}$$

令 $$\varphi(t)=-\ln P_{ii}(t)。 \tag{4}$$

由(3) 知，$\varphi(t)$取有极限．由(1.3)和(2)得

$$\lim_{t\to 0}\varphi(t)=0 \tag{5}$$

和 $$\varphi(t+s)\leqslant\varphi(s)+\varphi(t)。 \tag{6}$$

令 $$q_i=\sup_{0<t<+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}\leqslant+\infty。 \tag{7}$$

如$q_i<+\infty$， 则存在t_0，使$\frac{\varphi(t_0)}{t_0}>q_i-\varepsilon$．对任意的$t>0$，我们记 $t_0=nt+\delta$，$0\leqslant\delta<t$． (8)

于是由(6)得

$$q_i-\varepsilon<\frac{\varphi(t_0)}{t_0}\leqslant\frac{n\varphi(t)+\varphi(\delta)}{t_0}=\frac{nt}{t_0}\cdot\frac{\varphi(t)}{t}+\frac{\varphi(\delta)}{t_0}。 \tag{9}$$

由(5) 和(8) 得

$$\lim_{t\to 0}\delta=\lim_{t\to 0}\varphi(\delta)=0 \tag{10}$$

及 $$\lim_{t\to 0}\frac{nt}{t_0}=1。 \tag{11}$$

由(9) 、(10)和(11)得

$$q_i-\varepsilon\leqslant\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t}\leqslant\overline{\lim_{t\to 0}}\frac{\varphi(t)}{t}=q_i。 \tag{12}$$

由ε之任意性得 $$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t}=q_i。 \tag{13}$$

如果$q_i=+\infty$，那么为了得到这个结果， 以任给的任意大的正数M代替$q_i-\varepsilon$来进行论证就可以了．再由(1.3) 及微积分中的一个简单事实$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}=1$得

$$q_i=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\ln[1-(1-p_{ii}(t))]}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\ln[1-(1-p_{ii}(t))]}{1-p_{ii}(t)}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1-p_{ii}(t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-p_{ii}(t)}{t}.$$

于是定理得证。

今后我们用q_{ii}表示$p'_{ii}(0)$，常以q_i表示$-p'_{ii}(0)$，即$q_i=-q_{ii}$。若$q_i<+\infty$ $(i\in E)$，则称$P(t)=(p_{ij}(t))$为可微的马氏过程。

§4 $p'_{ij}(t)$的存在性和连续性

引理1 设$P(t)=(p_{ij}(t))$为一个马氏过程，若令

$$\hat{p}_{ij}(t)=\begin{cases}p_{ij}(t), & i,\ j\in E,\\ 1-\sum_{k\in E}p_{ik}(t), & i\in E,\ j=-1,\\ 0, & i=-1,\ j\in E,\\ 1, & i=j=-1,\end{cases}$$

则$\hat{P}(t)=(\hat{p}_{ij}(t);\ i,\ j\in\hat{E}=E\cup\{-1\})$是一个诚实的马氏过程。

证 显然有

$$\hat{p}_{ij}(t)\geqslant 0,\ (i,\ j\in\hat{E}). \tag{1}$$

$$\sum_{j\in\hat{E}}\hat{p}_{ij}(t)=1,\ (i\in\hat{E}). \tag{2}$$

$$\lim_{t\to 0}\hat{p}_{ij}(t)=\lim_{t\to 0}p_{ij}(t)=\delta_{ij},\ (i,j\in E). \tag{3}$$

$$\lim_{t\to 0}\hat{p}_{-1,-1}(t)=1, \tag{4}$$

$$\lim_{t\to 0}\hat{p}_{-1,j}(t)=\lim_{t\to 0}0=0. \tag{5}$$

由$\lim\limits_{t\to 0} p_{ii}(t)=1\quad (i\in E)$及$p_{ii}(t)\leqslant\sum\limits_{j\in E} p_{ij}(t)\leqslant 1\quad (i\in E)$

得

$$\lim_{t\to 0}\sum_{j\in E} p_{ij}(t)=1\quad (i\in E)。$$

于是 $$\lim_{t\to 0}\hat{p}_{i,-1}(t)=\lim_{t\to 0}\Big(1-\sum_{j\in E} p_{ij}(t)\Big)=0。\qquad (6)$$

注意$\hat{p}_{-1,j}(t)=0\quad (j\in E)$得

$$\hat{p}_{-1,j}(t+s)=0=\sum_{k\in\hat{E}}\hat{p}_{-1,k}(t)\hat{p}_{kj}(s),\quad (j\in E)\quad (7)$$

注意$\hat{p}_{i,-1}(t)=1-\sum\limits_{k\in E} p_{ik}(t)\quad (i\in E)$得

$$\hat{p}_{i,-1}(t+s)=1-\sum_{j\in E} p_{ij}(t+s)$$

$$=\sum_{k\in\hat{E}}\hat{p}_{ik}(t)-\sum_{j\in E}\sum_{k\in E} p_{ik}(t)p_{kj}(s)$$

$$=\sum_{k\in E} p_{ik}(t)+\hat{p}_{i,-1}(t)-\sum_{k\in E} p_{ik}(t)\sum_{j\in E} p_{kj}(s)$$

$$=\sum_{k\in E} p_{ik}(t)\Big(1-\sum_{j\in E} p_{kj}(s)\Big)+\hat{p}_{i,-1}(t)\cdot 1$$

$$=\sum_{k\in E}\hat{p}_{ik}(t)\cdot\hat{p}_{k,-1}(s)+\hat{p}_{i,-1}(t)\cdot\hat{p}_{-1,-1}(s)$$

$$=\sum_{k\in\hat{E}}\hat{p}_{ik}(t)\hat{p}_{k,-1}(s),\quad (i\in E)。\qquad (8)$$

又 $\hat{p}_{ij}(t+s)=p_{ij}(t+s)$

$$= \sum_{k\in E} p_{ik}(t)p_{kj}(s)$$

$$= \sum_{k\in E} \hat{p}_{ik}(t)\,\hat{p}_{kj}(s)$$

$$= \sum_{k\in \hat{E}} \hat{p}_{ik}(t)\,\hat{p}_{kj}(s),\quad (i,j\in E). \quad (9)$$

$$\hat{p}_{-1,-1}(t+s) = 1 = \hat{p}_{-1,-1}(t)\hat{p}_{-1,-1}(s)$$

$$= \sum_{k\in E} \hat{p}_{-1,k}(t)\cdot \hat{p}_{k,-1}(s) + \hat{p}_{-1,-1}(t)\,\hat{p}_{-1,-1}(s)$$

$$= \sum_{k\in \hat{E}} \hat{p}_{-1,k}(t)\,\hat{p}_{k,-1}(s). \quad (10)$$

由(1)—(10)知，$\hat{P}(t)=(\hat{p}_{ij}(t);\ i,\ j\in \hat{E})$是一个诚实的马氏过程。引理证毕。

定理1 设$P(t)=(p_{ij}(t))$是一个可微的马氏过程，则$p_{ij}(t)$在$[0,\infty)$上有连续的导数$p'_{ij}(t)$，且$|p'_{ij}(t)|\leqslant 2q_i$。

证 由引理1，不妨假定$P(t)=(p_{ij}(t))$是一个诚实的马氏过程。由(3.4)和(3.7)得

$$q_i \geqslant \frac{-\ln p_{ii}(t)}{t}.$$

于是 $p_{ii}(t)\geqslant e^{-q_i t}\geqslant 1-q_i t$。 (11)

由(11)和(2.1)得

$$|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)|\leqslant 1-p_{ii}(h)\leqslant q_i h. \quad (12)$$

(12)意味着函数$p_{ij}(t)$满足李普希兹条件。于是由定理10.2.8知，$p_{ij}(t)$是绝对连续函数，从而由定理10.2.9知$p_{ij}(t)$几乎处处存在有限导数，且等于其几乎处处导数的积分。

若$q_i=0$，则由(12)得$p_{ii}(t)\equiv 1$，于是$p_{ij}(t)\equiv\delta_{ij}$。这时$p'_{ij}(t)$

$\equiv 0$，定理为真。故假定$q_i>0$。由(11)和(12)得

$$p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\geqslant(p_{ii}(h)-1)p_{ij}(t)\geqslant -q_i h p_{ij}(t),$$

即
$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}+q_i p_{ij}(t)\geqslant 0.$$

于是
$$\underline{D}^+[e^{q_i t}p_{ij}(t)]=e^{q_i t}[\underline{D}^+p_{ij}(t)+q_i p_{ij}(t)]\geqslant 0. \quad (13)$$

此处$\underline{D}^+$表示右下导数。(13)的等式部分很容易由$\underline{D}^+$的定义和$e^{q_i t}$的可微性直接验证。由(13)、$p_{ij}(t)$的连续性和定理10.2.11知，$e^{q_i t}p_{ij}(t)$是t的非减函数。令

$$r_{ij}(t)=q_i^{-1}Dp_{ij}(t)+p_{ij}(t)\geqslant 0, \quad (14)$$

此处D表示导数。于是由$Dp_{ij}(t)$几乎处处有定义，从而在$Dp_{ij}(t)$有定义的地方$r_{ij}(t)$便有定义。由(1.1)、(1.2)和$P(t)$是诚实的，可得

$$\sum_{j\in E}e^{q_i s}p_{ij}(s)=e^{q_i s}, \quad (15)$$

$$e^{q_i(s+t)}p_{ij}(t+s)=e^{q_i t}\sum_{k\in E}e^{q_i s}p_{ik}(s)p_{kj}(t). \quad (16)$$

把定理10.2.10应用到上面两个式子得

$$\sum_{j\in E}r_{ij}(s)=1, \quad (17)$$

$$r_{ij}(s+t)=\sum_{k\in E}r_{ik}(s)p_{kj}(t). \quad (18)$$

(17)和(18)对每一个t和几乎一切s成立，当然例外集依赖于t。由$p_{ij}(t)$是t的连续函数知$p_{ij}(s+t)$是二元连续函数，故$Dp_{ij}(s+t)$是对于(s,t)的乘积可测函数，于是由(14)知$r_{ij}(s+t)$是对于(s,t)的乘积可测函数；由于$r_{ik}(s)p_{kj}(t)(i,j\in E)$是对于$(s,t)$的乘积可测函数，故$\sum_{k\in E}r_{ik}(s)p_{kj}(t)$亦是对于$(s,t)$的乘积可测

函数，所以使(17)和(18)不成立的集为(s,t)可测，由定理10.2.12知它是二维零测集。再由10.2.12知，知$s\notin z$，且$t\notin z_s$，则(17)和(18)同时成立，这里$\mu(z)=\mu(z_s)=0$。固定一个$s_0\notin z$，由(17)知(18)的右边是t的连续函数，知$r(s_0+t)$作为t的函数与一个连续函数在$[0,\infty)$上几乎处处重合，从而$p_{ij}(s_0+t)$的几乎处处导数$Dp_{ij}(s_0+t)$与一个连续函数$g(t)$在$[0,\infty)$上几乎处处重合．由$p_{ij}(s_0+t)$绝对连续及定理10.2.9得

$$p_{ij}(s_0+t)=p_{ij}(s_0)+\int_0^t Dp_{ij}(s_0+t)dt$$

$$=p_{ij}(s_0)+\int_0^t g(t)dt.$$

因为$g(t)$连续，上式中最后面的积分可理解为黎曼积分。于是由定理10.1.7知，在$[0,\infty)$上$p'_{ij}(s_0+t)$处处存在且等于$g(t)$，

$$p'_{ij}(s_0+t)=g(t),\quad t\geqslant 0.$$

由于$[0,\infty)\setminus z$在$[0,\infty)$上是稠集，可使s_0选得任意地小。于是，$p'_{ij}(t)$在$(0,\infty)$存在且连续。又因为$r_{ij}(t)$在$(0,\infty)$上非负、有限、连续且

$$r_{ij}(s+t)=\sum_{k\in E}r_{ik}(s)p_{kj}(t),\quad (s>0,\ t\geqslant 0). \tag{19}$$

于是
$$\sum_{j\in E}r_{ij}(s+t)=\sum_{j\in E}\sum_{k\in E}r_{ik}(s)p_{kj}(t)$$

$$=\sum_{k\in E}r_{ik}(s)\sum_{j\in E}p_{kj}(t)$$

$$=\sum_{k\in E}r_{ik}(s),\quad (s>0),$$

从而有
$$\sum_{k\in E}r_{ik}(s)=1\ (s>0). \tag{20}$$

对于固定的i和j，选择$t_n\downarrow 0$，$t'_n\downarrow 0$，$0<t'_n<t_n$，$r_{ij}(t)\to a_{ij}$，

$r_{ij}(t_n')\to a_{ij}'$。由(19)得

$$r_{ij}(t_n)=\sum_{k\in E}r_{ik}(t_n')p_{kj}(t_n-t_n')\geqslant r_{ij}(t_n')p_{jj}(t_n-t_n').$$

从而$a_{ij}\geqslant a_{ij}'$。由对称性知$a_{ij}=a_{ij}'$，故$\lim\limits_{t\to 0}r_{ij}(t)$存在且有限，从而$\lim\limits_{t\to 0}p_{ij}'(t)$存在且有限。由定理10.1.6知

$$\frac{p_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t}=p_{ij}'(\xi)(0<\xi<t).$$

于是$p_{ij}'(0)$存在，且

$$p_{ij}'(0)=\lim_{\xi\to 0}p_{ij}'(\xi).$$

综合上述，$p_{ij}'(t)$在[0，∞)上存在、有限且连续。由(14)得

$$|p_{ij}'(t)|\leqslant q_i(r_{ij}(t)+p_{ij}(t))$$

$$\leqslant q_i\Big(\sum_{j\in E}r_{ij}(t)+\sum_{j\in E}p_{ij}(t)\Big)=2q_i.$$

定理证毕。

今后用q_{ij}表示$p_{ij}'(0)$。

定理2 设$P(t)$为可微的马氏过程，则

$$p_{ij}'(s+t)=\sum_{k\in E}p_{ik}'(s)p_{kj}(t),\quad s>0,\quad t\geqslant 0. \tag{21}$$

证 分两种情况证明。

(I) 设$P(t)$是诚实的。

把$r_{ij}(t)=q_i^{-1}p_{ij}'(t)+p_{ij}(t)$代入(19)得

$$q_i^{-1}p_{ij}'(s+t)+p_{ij}(s+t)$$

$$=\sum_{k\in E}(q_i^{-1}p_{ik}'(s)+p_{ik}(s))p_{kj}(t)$$

$$=q_i^{-1}\sum_{k\in E}p_{ik}'(s)p_{kj}(t)+\sum_{k\in E}p_{ik}(s)p_{kj}(t)$$

$$=q_i^{-1}\sum_{k\in E}p_{ik}'(s)p_{kj}(t)+p_{ij}(s+t),\quad (s>0,\ t\geqslant 0).$$

于是立得 (2.1)。

(II) 设$P(t)$未必是诚实的。

仿引理5.1中办法，引入诚实的马氏过程

$\hat{P}(t)=(\hat{p}_{ij}(t);\ i,\ j\in\hat{E})$。于是

$$p'_{ij}(s+t)=\sum_{k\in\hat{E}}\hat{p}'_{ik}(s)\hat{p}_{kj}(t)(i,\ j\in\hat{E}).$$

故

$$p'_{ij}(s+t)=\hat{p}'_{ij}(s+t)$$
$$=\sum_{k\in\hat{E}}\hat{p}'_{ik}(s)\hat{p}_{kj}(t)=\sum_{k\in E}\hat{p}'_{ik}(s)\hat{p}_{kj}(t)$$
$$=\sum_{k\in E}p'_{ik}(s)p_{kj}(t),\quad (i,j\in E,\ s>0,\ t\geqslant 0).$$

于是(2.1)成立。定理证毕。

定理3 设$P(t)$为可微的马氏过程，则

$$p'_{ij}(s+t)=\sum_{k\in E}p_{ik}(t)p'_{kj}(s)\quad (t\geqslant 0,\ s>0).\tag{22}$$

证 分两种情况证明。

(I) 设$P(t)$是诚实的。

由(1.1.2)和(11)得

$$p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\geqslant p_{ij}(t)p_{jj}(h)-p_{ij}(t)$$
$$=p_{ij}(t)(p_{jj}(h)-1)$$
$$\geqslant -p_{ij}(t)hq_j\tag{23}$$

于是 $\quad (p_{ij}(t)e^{q_jt})'=(p'_{ij}(t)+p_{ij}(t)q_j)e^{q_jt}\geqslant 0$。

故$p_{ij}(t)e^{q_jt}$是t的非减连续函数。令

$$v_{ij}(t)=p'_{ij}(t)+p_{ij}(t)q_j\geqslant 0.\tag{24}$$

于是由定理2.1和定理1知，$v_{ij}(t)$在$[0,\infty)$上连续。由 (1.1.2) 得

$$p_{ij}(t+s)e^{q_j(t+s)}=e^{q_jt}\sum_{k\in E}p_{ik}(t)p_{kj}(s)e^{q_js}.\tag{25}$$

将上式两端对s求导数，并利用定理10.2.10得

$$v_{ij}(t+s)=\sum_{k\in E}p_{ik}(t)v_{kj}(s)。\qquad (26)$$

(26)对每一t和几乎一切s成立，当然这个例外集依赖于t. 由(23)和定理10.2.5知，在(26)中以"$\geqslant$"代替"$=$"后所得的不等式对一切t和s成立. 由$v_{ij}(t)$和$p_{ij}(t)$是连续函数知$v_{ij}(t+s)$和$\sum_{k\in E}p_{ik}(t)v_{kj}(s)$都是二元可测函数，因此由定理10.2.12，如$s\notin z$，$t\notin z_s$，则(26)成立。于此，$\mu(z)=\mu(z_s)=0$。对$s_0\notin z$，假定有某$t$，使

$$v_{ik}(t+s_0)>\sum_{k\in E}p_{ik}(t)v_{kj}(s_0),$$

则对于$t'>t$，我们有

$$\begin{aligned}v_{ij}(t'+s_0)&\geqslant\sum_{l\in E}p_{il}(t'-t)v_{lj}(t+s_0)\\&>\sum_{l\in E}p_{il}(t'-t)\sum_{k\in E}p_{lk}(t)v_{kj}(s_0)\\&=\sum_{k\in E}p_{ik}(t')v_{kj}(s_0).\end{aligned}$$

但这与(26)对s_0和几乎一切t成立矛盾.因此若$s\notin z$，z_s为空集。再设$s>0$为任意，且$0<s'<s$，$s'\notin z$，则

$$\begin{aligned}v_{ij}(t+s)&=v_{ij}(t+s-s'+s')\\&=\sum_{k\in E}p_{ik}(t+s-s')v_{kj}(s')\\&=\sum_{k\in E}\sum_{l\in E}p_{il}(t)p_{lk}(s-s')v_{kj}(s')\\&=\sum_{l\in E}p_{il}(t)v_{lj}(s).\end{aligned}$$

从而z只可能包含一个元素$\{0\}$。因此(26)对所有的$t\geqslant 0$，$s>0$成立。把(24)代入(26)，并注意$\sum\limits_{j\in E} p_{ij}(t)=1$立得(22)。

(II) 设$P(t)$未必诚实，则仿定理 2 相应部分的证明立得(22)。定理得证。

§5 不等式$\sum\limits_{j\in E} q_{ij}\leqslant 0$之证明

定理1 若$P(t)$为可微马氏过程，则对任意的$i\in E$，有

$$\sum_{j\in E} q_{ij}\leqslant 0. \tag{1}$$

证 由(1.1)得

$$\sum_{j\neq i}\frac{p_{ij}(t)}{t}+\frac{p_{ii}(t)-1}{t}\leqslant 0.$$

于是由定理10.2.5立得(1)。定理证毕。

§6 Q-矩阵与Q过程的定义

上面我们证明了，对任一可微马氏过程$(p_{ij}(t))$，导数

$$\lim_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t}=q_{ij} \tag{1}$$

存在，并且

$$\left.\begin{aligned}&0\leqslant q_{ij}<+\infty\quad(i\neq j),\quad 0\leqslant q_i\equiv -q_{ii}<+\infty;\\&\sum_{j\in E} q_{ij}\leqslant 0\quad(i\in E).\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

简称$Q=(q_{ij})$为过程的密度矩阵，而过程$(p_{ij}(t))$则简称为Q过程，以表示它与Q有(1)的关系

定义1 称定义在$E\times E$上的矩阵$Q=(q_{ij})$为Q-矩阵，如果

它满足

$$\left.\begin{array}{l}0\leqslant q_{ij}<+\infty\ (i\neq j),\ 0\leqslant q_i=-q_{ii}<+\infty;\\ \sum_{j\in E}q_{ij}\leqslant 0\ (i\in E).\end{array}\right\}\quad(3)$$

若还有 $\sum_{j\in E}q_{ij}=0\ (i\in E)$, (4)

则称Q为保守的Q-矩阵。由(2)知，每个可微过程的密度矩阵是Q-矩阵。

§7 两个微分方程组

定理1 若$P(t)=(p_{ij}(t))$为一Q过程，则

$$p'_{ij}(t)\geqslant\sum_{k\in E}q_{ik}p_{kj}(t),\ (i,j\in E). \quad (1)$$

证 由(1.2)得

$$p_{ij}(t+h)=\sum_{k\in E}p_{ik}(h)p_{kj}(t).$$

于是
$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}=\frac{p_{ii}(h)-1}{h}p_{ij}(t)+\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t).$$

在上式中令$h\to 0$。由定理3.1、定理4.1及定理10.2.5立得(1)。定理得证。

同理可证：

定理2 若$P(t)=(p_{ij}(t))$为一个Q过程，则

$$p'_{ij}(t)\geqslant\sum_{k\in E}p_{ik}(t)q_{kj},\ (i,j\in E). \quad (2)$$

在一切Q过程中，往往有些能使(1)或(2)中的"$\geqslant$"号成为"$=$"号，所以我们引入：

定义1 方程组

$$p'_{ij}(t)=\sum_{k\in E}q_{ik}p_{kj}(t) \quad (i,j\in E) \tag{3}$$

和

$$p'_{ij}(t)=\sum_{k\in E}p_{ik}(t)q_{kj} \quad (i,j\in E) \tag{4}$$

分别叫做柯氏（柯尔莫哥洛夫）向后微分方程组和柯氏向前微分方程组。我们把满足(3)和(4)的Q过程分别叫做B型Q过程和F型Q过程。

定理3 若Q保守，则任一Q过程$P(t)=(p_{ij}(t))$满足柯氏向后微分方程组，即$P(t)$是B型Q过程。

证 分两种情况来证明。

(I) 设$P(t)$是诚实的。在定理4.1的证明过程中曾指出，

$$\sum_{j\in E}r_{ij}(t)=1, \quad (i,j\in E;t>0), \tag{5}$$

这里

$$r_{ij}(t)=q_i^{-1}p'_{ij}(t)+p_{ij}(t)。 \tag{6}$$

由(5)和(6)得

$$\sum_{j\in E}p'_{ij}(t)=0。 \tag{7}$$

由定理1知

$$p'_{ij}(t)\geqslant\sum_{k\in E}q_{ik}p_{kj}(t), \quad (i\in E)。 \tag{8}$$

若(8)式对某个i成立严格不等号，则由

$$\sum_{j\in E}\sum_{k\in E}|q_{ik}p_{kj}(t)|\leqslant\sum_{k\in E}|q_{ik}|\cdot\sum_{j\in E}p_{kj}(t)$$

$$\leqslant\sum_{k\in E}|q_{ik}|\leqslant 2q_i<+\infty,$$

Q保守及定理10.1.3得

$$\sum_{j \in E} p'_{ij}(t) > \sum_{k \in E} q_{ik} \sum_{j \in E} p_{kj}(t) = \sum_{k \in E} q_{ik} = 0.$$

这与(7)矛盾．所以必有 $p'_{ij}(t) = \sum_{k \in E} q_{ik} p_{kj}(t)$。即$P(t)$为$B$型$Q$过程。

(II) 设$P(t) = (p_{ij}(t);\ i,j \in E)$不是诚实的，则我们可以按引理4.1中的办法作一个诚实的马氏过程$\hat{P}(t)$。以$\hat{Q} = (\hat{q}_{ij}; i,j \in \hat{E})$表示$\hat{P}(t)$的$Q$-矩阵。显然有

$$\hat{q}_{ij} = \begin{cases} q_{ij}, & i,j \in E; \\ 0, & i = -1, j \in \hat{E}. \end{cases} \tag{9}$$

所以$\hat{P}(t)$是一个可微马氏过程。对于$\hat{q}_{i,-1}$ $(i \in E)$，我们也可以计算出来，事实上，由(5.1)得

$$-\hat{q}_{ii} \geqslant \sum_{j \in \hat{E} \setminus \{i\}} \hat{q}_{ij}, \quad (i \in E).$$

即

$$-q_{ii} \geqslant \sum_{j \in E \setminus \{i\}} q_{ij} + q_{i,-1}, \quad (i \in E). \tag{10}$$

由(10)和Q保守$\left(\text{即} -q_{ii} = \sum_{j \in E \setminus \{i\}} q_{ij}\right)$得$q_{i,-1} \leqslant 0$，于是由$q_{i,-1} \geqslant 0$得

$$q_{i,-1} = 0, \quad (i \in E).$$

故

$$-\hat{q}_{ii} = -q_{ii} = \sum_{j \in E \setminus \{i\}} q_{ij} = \sum_{j \in \hat{E} \setminus \{i\}} \hat{q}_{ij}, \quad (i \in E).$$

$$q_{-1,-1} = 0 = \sum_{j \in E} \hat{q}_{-1,j} = \sum_{j \in \hat{E} \setminus \{i\}} q_{-1,j}.$$

所以，由Q保守再注意$\hat{P}(t)$是诚实的，立得

$$p'_{ij}(t+s) = \hat{p}'_{ij}(t+s)$$

$$= \sum_{k \in \hat{E}} \hat{q}_{ik} \hat{p}_{kj}(t)$$

$$= \sum_{k \in E} q_{ik} p_{kj}(t), \quad (i, j \in E).$$

故$P(t)$是B型Q过程. 定理证毕

§8 讨论的核心问题

上节已经提出，任一可微马氏过程的密度矩阵是 Q-矩阵。现在我们提出相反的问题：对任给的一个Q-矩阵，1)是否存在Q过程呢？2)若Q过程存在，恰好只存在一个Q过程的充要条件是什么？对于B型和F型的Q过程也都存在同样的问题. 这本小册子的目的是紧紧围绕第二个问题来给出上述诸问题的全部解答。

第 2 章

非负线性方程组的最小非负解

§1 非负线性方程组的定义及其最小非负解的定义、存在和唯一性

下面我们约定非负数集包括$+\infty$。

定义1 线性方程组

$$x_i=\sum_{k\in E}c_{ik}x_k+b_i,\quad (i\in E) \tag{1}$$

称为非负线性方程组，如果

$$0\leqslant c_{ik}<+\infty\ (i,\ k\in E),\ 0\leqslant b_i\leqslant+\infty\quad (i\in E),$$

其中E为有限集或可列集。

下面总假定(1)是非负线性方程组。

定义2 (1)的非负解$0\leqslant x_i^*\leqslant+\infty$ $(i\in E)$ 称为(1)的最小非负解，如果对于(1)的任一非负解$0\leqslant x_i\leqslant+\infty$ $(i\in E)$，恒有

$$x_i^*\leqslant x_i\ (i\in E)。\tag{2}$$

定理1 (1)的最小非负解存在唯一；若令

$$\left.\begin{aligned}&x_i^{(0)}\equiv 0\ (i\in E),\\&x_i^{(n+1)}=\sum_{k\in E}c_{ik}x_k^{(n)}+b_i\ (n\geqslant 0,i\in E),\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

则$x_i^{(n)}\uparrow$ $(n\uparrow+\infty)$。若令

$$x_i^*=\lim_{n\to\infty}x_i^{(n)}\quad(i\in E),\tag{4}$$

则x_i^* $(i\in E)$ 就是(1)的最小非负解。

证 显然，$x_i^{(1)}=b_i\geqslant 0=x_i^{(0)}$ $(i\in E)$。如果现在已经证明$x_i^{(n)}\geqslant x_i^{(n-1)}\geqslant 0$ $(i\in E)$，则根据(3)得

$$x_i^{(n+1)}=\sum_{k\in E}c_{ik}x_k^{(n)}+b_i\geqslant\sum_{k\in E}c_{ik}x_k^{(n-1)}+b_i=x_i^{(n)}\geqslant 0$$

$$(i\in E).$$

于是由归纳法知

$$x_i^{(n+1)}\geqslant x_i^{(n)}\geqslant 0\ (i\in E,\ n\geqslant 0).$$

所以存在$x_i^*\geqslant 0$ $(i\in E)$，使

$$x_i^{(n)}\uparrow x_i^*\ (i\in E).\tag{5}$$

由(5)及定理10.2.3得，在$n\uparrow+\infty$时，(3)之右端允许逐项求极限，于是有

$$x_i^*=\sum_{k\in E}c_{ik}x_k^*+b_i\ (i\in E).\tag{6}$$

即$x_i^*(i\in E)$ 是(1)的一个非负解。再证它满足(2)。为此，设$x_i(i\in E)$为(1)的任一非负解，显然$x_i^{(0)}=0\leqslant x_i$ $(i\in E)$。如果现在已经证明$x_i^{(n)}\leqslant x_i$ $(i\in E)$，则根据(3)得

$$x_i^{(n+1)}=\sum_{k\in E}c_{ik}x_k^{(n)}+b_i\leqslant\sum_{k\in E}c_{ik}x_k+b_i=x_i\quad(i\in E).$$

于是由归纳法得

$$x_i^{(n)}\leqslant x_i\ (i\in E,\ n\geqslant 0).$$

由(5)立得(2)。所以x_i^* $(i\in E)$是(1)的最小非负解。唯一性显见正确，于是定理获证。

§2 比较定理和线性组合定理

定义1 不等式组

$$X_i \geqslant \sum_{k \in E} C_{ik} X_k + B_i \quad (i \in E) \tag{1}$$

称为非负线性方程组(1.1)的优系统，如果

$$c_{ik} \leqslant C_{ik} \quad (i,\ k \in E), \tag{2}$$

$$b_i \leqslant B_i \quad (i \in E). \tag{3}$$

定理1（比较定理）设X_i $(i \in E)$是(1.1)的优系统(1)的任一非负解，x_i^*是(1.1)的最小非负解，则

$$x_i^* \leqslant X_i \quad (i \in E). \tag{4}$$

证 仿定理1.1关于x_i^*满足(2)的证明，立得本定理。

定理2（线性组合定理）设G为一有限集或可列集，s表G的任一元，$a_s \geqslant 0$ $(s \in G)$。对任一$s \in G$，若$x_i^{(s)*}$ $(i \in E)$ 是非负线性方程组

$$x_i = \sum_{k \in E} c_{ik} x_k + b_i^{(s)} \quad (i \in E) \tag{5}$$

的最小非负解，则

$$x_i^* = \sum_{s \in G} a_s x_i^{(s)*} \quad (i \in E) \tag{6}$$

是非负线性方程组

$$x_i = \sum_{k \in E} c_{ik} x_k + \sum_{s \in G} a_s b_i^{(s)} \quad (i \in E) \tag{7}$$

的最小非负解。

证 令

$$\left.\begin{aligned} & x_i^{(s)(0)} \equiv 0, \\ & x_i^{(s)(n+1)} = \sum_{k \in E} c_{ik} x_k^{(s)(n)} + b_i^{(s)} \quad (i \in E) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

和

$$\left.\begin{aligned} & x_i^{(0)} \equiv 0, \\ & x_i^{(n+1)} = \sum_{k \in E} c_{ik} x_k^{(n)} + \sum_{s \in G} a_s b_i^{(s)} \quad (i \in E). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

由(8)和(9)得$x_i^{(0)}=0=\sum_{s\in G}a_s x_i^{(s)(0)}$ $(i\in E)$。若已证。

$$x_i^{(n)}=\sum_{s\in G}a_s x_i^{(s)(n)},$$

则
$$\begin{aligned}x_i^{(n+1)}&=\sum_{k\in E}c_{ik}x_k^{(n)}+\sum_{s\in G}a_s b_i^{(s)}\\&=\sum_{k\in E}c_{ik}\Big(\sum_{s\in G}a_s x_k^{(s)(n)}\Big)+\sum_{s\in G}a_s b_i^{(s)}\\&=\sum_{s\in G}a_s\Big(\sum_{k\in E}c_{ik}x_k^{(s)(n)}+b_i^{(s)}\Big)\\&=\sum_{s\in G}a_s x_i^{(s)(n+1)}.\end{aligned}$$

于是由归纳法知

$$x_i^{(n)}=\sum_{s\in G}a_s x_i^{(s)(n)}\quad(i\in E,n\geqslant 0).\qquad(10)$$

由定理1.1知

$$x_i^{(n)}\uparrow x_i^*,\ x_i^{(s)(n)}\uparrow x_i^{(s)*}\quad(n\uparrow+\infty,i\in E).\qquad(11)$$

且$x_i^{(s)*}(i\in E)$和$x_i^*(i\in E)$分别是(5)和(7)的最小非负解。由(10)和(11)立得(6)。于是定理获证。

§3 对偶定理

设C、B、$\widetilde{C}$和$\widetilde{B}$是定义在$E\times E$上的非负矩阵，0表示定义在$E\times E$上的零矩阵。令

$$\left.\begin{aligned}&X^{(0)}=B,\\&X^{(n+1)}=CX^{(n)}+B\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

和

$$\left.\begin{aligned}&\widetilde{X}^{(0)}=\widetilde{B},\\&\widetilde{X}^{(n+1)}=\widetilde{X}^{(n)}\widetilde{C}+\widetilde{B}.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

定理1 若

$$X^{(0)}=\widetilde{X}^{(0)},\quad X^{(1)}=\widetilde{X}^{(1)},\tag{3}$$

即 $$B=\widetilde{B},\ CB=\widetilde{B}\,\widetilde{C},\tag{4}$$

则 $$X^{(n)}=\widetilde{X}^{(n)}\ (n=0,1,2,\cdots).\tag{5}$$

证 由 (1) 和 (2) 知

$$\left.\begin{aligned}&X^{(0)}=B,\ X^{(1)}=CB+B,\\&\widetilde{X}^{(0)}=\widetilde{B},\quad \widetilde{X}^{(1)}=\widetilde{B}\,\widetilde{C}+\widetilde{B}.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

所以 (3) 与 (4) 等价。由 (4) 可得

$$C^nB=C^{n-1}\widetilde{B}\,\widetilde{C}=C^{n-1}B\widetilde{C}=\widetilde{B}\,\widetilde{C}^{(n)}.\tag{7}$$

由 (1)、(2) 和 (7) 得

$$X^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C^kB=\sum_{k=0}^{n}\widetilde{B}\,\widetilde{C}^k=\widetilde{X}^{(n)}.$$

于是定理获证。

第 3 章

Q过程的拉氏变换

如果对于定义在$0\leqslant t<+\infty$中的函数$\varphi(t)$

$$f(\lambda)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\varphi(t)dt$$

存在，则把$f(\lambda)$叫做$\varphi(t)$的拉氏（Laplace）变换。在这一章里将给出Q过程、B型Q过程和F型Q过程的拉氏变换的判别准则。它们是研究Q过程的有力工具。

§1 马氏预解式

定义1 一个矩阵$R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda))$叫做一个马氏预解式，如果它同时满足下列三个条件：

(i) $R(\lambda)\geqslant 0$，$\lambda R(\lambda)\mathbf{1}\leqslant\mathbf{1}$ $(\lambda>0)$； (1)

(ii) $R(\lambda)-R(\mu)+(\lambda-\mu)R(\lambda)R(\mu)=0$ $(\lambda>0,\ \mu>0)$； (2)

(iii) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda R(\lambda)=I$， (3)

其中I为单位矩阵，$\mathbf{1}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\end{pmatrix}$。

定义2 我们称函数$f(\lambda)(0<\lambda<+\infty)$是完全单调的，如

果$f(\lambda)$在$(0, \infty)$内有各阶导数且

$$(-1)^n \frac{d^n f(\lambda)}{d\lambda^n} \geqslant 0 \quad (0<\lambda<\infty, \ n=0,1,\cdots).$$

定理1 设$R(\lambda)$是一个马氏预解式，则

$$\frac{d^n R(\lambda)}{d\lambda^n} = (-1)^n n! R^{n+1}(\lambda) \quad (n \geqslant 0). \tag{4}$$

从而$r_{ij}(\lambda)$是完全单调函数。

证 由(2)得

$$\frac{R(\lambda)-R(\mu)}{\lambda-\mu} = -R(\lambda)R(\mu).$$

令上式中$\mu \to \lambda$，并注意(1)和定理10.1.7得

$$\frac{dR(\lambda)}{d\lambda} = -R^2(\lambda). \tag{5}$$

又由(2)得$R(\lambda)R(\mu) = R(\mu)R(\lambda)$。于是

$$\begin{aligned}\frac{R^n(\lambda)-R^n(\mu)}{\lambda-\mu} = \frac{R(\lambda)-R(\mu)}{\lambda-\mu}&(R^{n-1}(\lambda) \\ &+R^{n-2}(\lambda)R(\mu)+\cdots \\ &+R(\lambda)R^{n-2}(\mu)+R^{n-1}(\mu)).\end{aligned}$$

令上式中$\mu \to \lambda$并注意(1)、(5)和定理10.1.6得

$$\frac{dR^n(\lambda)}{d\lambda} = -nR^{n+1}(\lambda). \tag{6}$$

由(5)、(6)以及归纳法立得(4)。定理证毕。

定理2 设$R(\lambda)$是一个马氏预解式，则对任一非负整数N，

$\frac{1}{\lambda} - \sum_{j=0}^{N} r_{ij}(\lambda)$是完全单调函数，即

$$(-1)^n \frac{d^n\left(\frac{1}{\lambda} - \sum_{j=0}^{N} r_{ij}(\lambda)\right)}{d\lambda^n} \geqslant 0$$

$$(\lambda>0,\ N=0,1,\cdots)。\tag{7}$$

证 由(1)得

$$R^n(\lambda)1=\frac{\lambda^{n-1}R^{n-1}(\lambda)\cdot\lambda R(\lambda)1}{\lambda^n}$$

$$\leqslant\frac{\lambda^{n-1}R^{n-1}(\lambda)1}{\lambda^n}\leqslant\frac{1}{\lambda^n}。$$

于是,由(1)得

$$0\leqslant\sum_{j=0}^{N}r_{ij}^{(n)}(\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda^n},\tag{8}$$

这里$r_{ij}^{(n)}(\lambda)$表示$R^n(\lambda)$的元素。由(8)和定理1得

$$(-1)^n\frac{d^n\left(\frac{1}{\lambda}-\sum_{j=0}^{N}r_{ij}(\lambda)\right)}{d\lambda^n}$$

$$=(-1)^n\left((-1)^n n!\lambda^{-(n+1)}-\sum_{j=0}^{N}(-1)^n n!r_{ij}^{(n+1)}(\lambda)\right)$$

$$=n!\left(\lambda^{-(n+1)}-\sum_{j=0}^{N}r_{ij}^{(n+1)}(\lambda)\right)$$

$$\geqslant n!(\lambda^{-(n+1)}-\lambda^{-(n+1)})=0。$$

于是定理得证。

定理3 设R(λ)为一个马氏预解式，则

$$\frac{d^n(\lambda R(\lambda)-I)}{d\lambda^n}=(-1)^{n+1}n!(I-\lambda R(\lambda))R^n(\lambda),$$

$$(n\geqslant 0)。\tag{9}$$

证 由(6)得

$$\frac{d(R^{n-1}(\lambda)-\lambda R^n(\lambda))}{d\lambda}=-(n-1)R^n(\lambda)-R^n(\lambda)$$

$$+n\lambda R^{n+1}(\lambda)$$

$$=-n(I-\lambda R(\lambda))R^n(\lambda)。\tag{10}$$

显然(9)对$n=0$成立，若假定(9)对$n-1$已成立，则由(10)得

$$\frac{d^n\lambda R(\lambda)}{d\lambda^n}=\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d^{n-1}\lambda R(\lambda)}{d\lambda^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{d}{d\lambda}((-1)^n(n-1)!R^{n-1}(\lambda)(I-\lambda R(\lambda))$$

$$=(-1)^n(n-1)!\frac{d}{d\lambda}(R^{n-1}(\lambda)-\lambda R^n(\lambda))$$

$$=(-1)^n(n-1)!(-n)(I-\lambda R(\lambda))R^n(\lambda)$$

$$=(-1)^{n+1}n!(I-\lambda R(\lambda))R^n(\lambda).$$

于是，(9)对n亦成立。故由归纳法知(9)为真。定理得证。

§2 Q-预解式

定义1 设任给一个Q-矩阵，矩阵$R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda))$叫做一个$Q$-预解式，如果§1中的条件(i)、(ii)和下列条件(iii)′同时成立：

(iii)′ $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda R(\lambda)-I)=Q$。 (1)

显然有

引理1 若条件(iii)′成立，则§1中条件(iii)成立。从而，一个Q-预解式是一个马氏预解式。

定理1 若$R(\lambda)$为一Q-预解式，则对每个$i\in E$有

$$\left|\frac{d^n(\lambda r_{ij}(\lambda)-\delta_{ij})}{d\lambda^n}\right|\leqslant\frac{M_i n!}{\lambda^{n+1}}, \tag{2}$$

其中$M_i>0$为常数。

证 由(1.8)得

$$r_{ij}^{(n)}(\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda^n}. \tag{3}$$

由(1.1)得

$$0\leqslant\sum_{k\neq i}\lambda r_{ik}(\lambda)\leqslant 1-\lambda r_{ii}(\lambda)。\tag{4}$$

由(1)知

$$\lim\lambda(1-\lambda r_{ii}(\lambda))=-q_{ii}\equiv q_i。$$

故存在常数$\lambda_0>0$，使

$$\lambda(1-\lambda r_{ii}(\lambda))\leqslant q_i+1\quad(\lambda\geqslant\lambda_0),$$

即
$$1-\lambda r_{ii}(\lambda)\leqslant\frac{q_i+1}{\lambda}\qquad(\lambda\geqslant\lambda_0)。\tag{5}$$

由(1.1)知

$$1-\lambda r_{ii}(\lambda)\leqslant 1+\lambda r_{ii}(\lambda)\leqslant 1+\lambda\sum_{k\in E}r_{ik}(\lambda)\leqslant 2\leqslant\frac{2\lambda_0}{\lambda},$$

$$(0<\lambda<\lambda_0)。\tag{6}$$

令$M_i=2(q_i+1+2\lambda_0)$，于是由(4)、(5)和(6)得

$$\sum_{k\in E}|\delta_{ik}-\lambda r_{ik}(\lambda)|=(1-\lambda r_{ii}(\lambda))+\sum_{k\neq i}\lambda r_{ik}(\lambda)\leqslant\frac{M_i}{\lambda}。$$

故由(1.9)和(3)得

$$\left|\frac{d^n(\lambda r_{ij}(\lambda)-\delta_{ij})}{d\lambda^n}\right|\leqslant n!\sum_{k\in E}|\delta_{ik}-\lambda r_{ik}(\lambda)|\,r_{kj}^{(n)}(\lambda)$$

$$\leqslant n!\sum_{k\in E}|\delta_{ik}-\lambda r_{ik}(\lambda)|\frac{1}{\lambda^n}$$

$$\leqslant n!\frac{1}{\lambda^n}\sum_{k\in E}|\delta_{ik}-\lambda r_{ik}(\lambda)|$$

$$\leqslant\frac{n!M_i}{\lambda^{n+1}}。$$

于是引理得证。

定义2 对任给的一个Q-矩阵，矩阵$R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda))$叫做一

个B型Q-预解式，如果§1中条件(i)、(ii)和下列条件 (iii)″同时成立：

(iii)″ $(\lambda I - Q)R(\lambda) = I$。 (7)

引理2 B型Q-预解式必是Q 预解式。

证 设$R(\lambda)$是一个B型Q-预解式，由条件(ii)知有$r_{ij}(\lambda)\downarrow$ $(\lambda\uparrow+\infty)$。由条件(i)得

$$0\leqslant r_{ij}(\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda}.$$

于是 $r_{ij}(\lambda)\downarrow 0 \quad (\lambda\uparrow+\infty)$。 (8)

故由(iii)″得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda r_{ij}(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}(\delta_{ij}-q_i r_{ij}(\lambda)+\sum_{k\neq i}q_{ik}r_{kj}(\lambda))=\delta_{ij}. \quad (9)$$

又由(7)得

$$\lambda(\lambda r_{ij}(\lambda)-\delta_{ij})=\sum_{k\in E}q_{ik}\lambda r_{kj}(\lambda).$$

但
$$\sum_{k\in E}|q_{ik}\lambda r_{kj}(\lambda)|\leqslant\sum_{k\in E}|q_{ik}|\lambda r_{kj}(\lambda)$$

$$\leqslant\sum_{k\in E}|q_{ik}|\leqslant 2q_i<+\infty,$$

所以由(9)和定理10.1.8得

$$\lim_{\lambda\to\infty}(\lambda r_{ij}(\lambda)-\delta_{ij})=\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k\in E}q_{ik}\lambda r_{kj}(\lambda)$$

$$=\sum_{k\in E}q_{ik}\lim_{\lambda\to\infty}\lambda r_{kj}(\lambda)=\sum_{k\in E}q_{ik}\delta_{kj}=q_{ij}.$$

从而条件(iii)′成立，所以$R(\lambda)$是一个 Q-预解式。引理得证。

定义3 对任给的一个Q-矩阵，矩阵$R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda))$叫做一

个F型Q-预解式，如果§1中条件(i)、(ii)和下列条件(iii)'''同时成立：

(iii)''' $R(\lambda)(\lambda I-Q)=I$。 (10)

引理3 F型预解式必是Q-预解式。

证 设$R(\lambda)$是一个F型Q-预解式。由于(8)是由条件(i)和(ii)推出的，故在此(8)仍成立。由(8)、(10)和定理10.2.4得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda r_{ij}(\lambda)-\delta_{ij}=\lim_{\lambda\to\infty}(-q_j r_{ij}(\lambda))+\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k\neq j}r_{ik}(\lambda)q_{kj}$$

$$=0。\tag{11}$$

又由条件(i)和(ii)得

$$r_{ik}(\lambda)=r_{ik}(\mu)+(\mu-\lambda)\sum_{s\in E}r_{is}(\mu)r_{sk}(\lambda)。$$

所以
$$\sum_{k\neq j}r_{ik}(\lambda)q_{kj}=\sum_{k\neq j}r_{ik}(\mu)q_{kj}$$

$$+(\mu-\lambda)\sum_{s\in E}r_{is}(\mu)\sum_{k\neq j}r_{sk}(\lambda)q_{kj},$$

即
$$\sum_{k\neq j}r_{ik}(\lambda)q_{kj}+\sum_{s\in E}r_{is}(\mu)\sum_{k\neq j}\lambda r_{sk}(\lambda)q_{kj}$$

$$=\sum_{k\neq j}r_{ik}(\mu)q_{kj}+\mu\sum_{s\in E}r_{is}(\mu)\sum_{k\neq j}r_{sk}(\lambda)q_{kj}。\tag{12}$$

由(8)及定理10.2.4有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k\neq j}r_{ik}(\lambda)q_{kj}=\sum_{k\neq j}\lim_{\lambda\to\infty}r_{ik}(\lambda)q_{kj}=0\tag{13}$$

及
$$\lim\mu\sum_{s\in E}r_{is}(\mu)\sum_{k\neq j}r_{sk}(\lambda)q_{kj}$$

$$=\mu\sum_{s\in E}r_{is}(\mu)\sum_{k\neq j}\lim_{\lambda\to\infty}r_{sk}(\lambda)q_{kj}=0。\tag{14}$$

由(12)、(13)和(14)得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{s\in E} r_{is}(\mu)\sum_{k\neq j}\lambda r_{sk}(\lambda)q_{kj}$$

$$=\sum_{k\neq j} r_{ik}(\mu)q_{kj}=\sum_{s\neq j} r_{is}(\mu)q_{sj}。\qquad (15)$$

固定$s_0\in E$，选$\lambda_n\to\infty$，使$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum\limits_{k\neq j}\lambda_n r_{s_0k}(\lambda_n)q_{kj}=a_{s_0j}$存在。于是

$$a_{s_0j}=\lim_{\lambda_n\to\infty}\sum_{k\neq j}\lambda_n r_{s_0k}(\lambda_n)q_{kj}$$

$$\geqslant\sum_{k\neq j}\lim_{\lambda_n\to\infty}\lambda_n r_{s_0k}(\lambda_n)q_{kj}=\begin{cases}0, & s_0=j,\\ q_{s_0j}, & s_0\neq j。\end{cases}\qquad (16)$$

由(15)得

$$\sum_{s\neq j} r_{is}(\mu)q_{sj}=\lim_{\lambda_n\to\infty}\sum_{s\in E} r_{is}(\mu)\sum_{k\neq j}\lambda_n r_{sk}(\lambda_n)q_{kj}$$

$$\geqslant\lim_{\lambda\to\infty} r_{is_0}(\mu)\sum_{k\neq j}\lambda_n r_{s_0k}(\lambda_n)q_{kj}$$

$$+\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{s\neq s_0} r_{is}(\mu)\sum_{k\neq j}\lambda_n r_{sk}(\lambda_n)q_{kj}$$

$$\geqslant r_{is_0}(\mu)a_{s_0j}+\sum_{s\neq s_0} r_{is}(\mu)\sum_{k\neq j}\lim_{\lambda_n\to\infty}\lambda_n r_{sk}(\lambda_n)q_{kj}$$

$$=r_{is_0}(\mu)a_{s_0j}+\sum_{\substack{s\neq s_0\\ s\neq j}} r_{is}(\mu)q_{sj}。\qquad (17)$$

若$s_0\neq j$，则由(17)得

$$r_{is_0}(\mu)q_{s_0j}\geqslant r_{is_0}(\mu)a_{s_0j}\quad (i\in E)。$$

特别 $\quad r_{s_0s_0}(\mu)q_{s_0j}\geqslant r_{s_0s_0}(\mu)a_{s_0j}。$

因为 $\quad \mu r_{s_0s_0}(\mu)q\to 1,\ (\mu\to\infty)。\qquad (18)$

所以可选一个μ_0，使$r_{s_0s_0}(\mu)>0$。从而有

$$q_{s_0j}\geqslant a_{s_0j}. \qquad (19)$$

由(16)和(19)得

$$a_{s_0j}=q_{s_0j}. \qquad (20)$$

从而$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum\limits_{k\neq j}\lambda r_{s_0k}(\lambda)q_{kj}$存在且

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k\neq j}\lambda r_{s_0k}(\lambda)q_{kj}=q_{s_0j}=\sum_{k\neq j}\lim_{\lambda\to\infty}\lambda r_{s_0k}(\lambda)q_{kj},$$

$$(s_0\neq j). \qquad (21)$$

若$s_0=j$，则由$a_{jj}\geqslant 0$及(17)得

$$r_{jj}(\mu)a_{jj}\leqslant 0.$$

于是再由(18)及$a_{jj}\geqslant 0$得

$$a_{jj}=0.$$

所以$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum\limits_{k\neq j}\lambda r_{jk}(\lambda)q_{kj}$存在且

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k\neq j}\lambda r_{jk}(\lambda)q_{kj}=0=\sum_{k\neq j}\lim_{\lambda\to\infty}\lambda r_{jk}(\lambda)q_{kj}. \qquad (22)$$

总合(21)和(22)得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k\neq j}\lambda r_{ik}(\lambda)q_{kj}=\sum_{k\neq j}\lim_{\lambda\to\infty}\lambda r_{ik}(\lambda)q_{kj},\ (i,j\in E). \qquad (23)$$

由(10)和(23)得

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda r_{ij}(\lambda)-\delta_{ij})&=\lim_{\lambda\to\infty}q_{jj}\lambda r_{ij}(\lambda)+\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k\neq j}\lambda r_{ik}(\lambda)q_{kj}\\&=\lim_{\lambda\to\infty}a_{jj}\lambda r_{ij}(\lambda)+\sum_{k\neq j}\lim_{\lambda\to\infty}\lambda r_{ik}(\lambda)q_{kj}\\&=\sum_{k\in E}\lim_{\lambda\to\infty}\lambda r_{ik}(\lambda)q_{kj}=q_{ij}.\end{aligned}$$

所以条件(iii)′成立，故$R(\lambda)$是一个Q-预解式。引理得证。

§3　Q过程的拉氏变换的判别准则

定理1　一个Q过程与它的拉氏变换相互唯一决定。

证　由(1.1.1)和定理1.2.1知，任一Q过程$P(t)=(p_{ij}(t))$的任一元素$p_{ij}(t)$是$[0,\infty)$上的有界连续函数。于是由定理10.3.1立得本定理。

由于定理1，今后我们也常把Q过程的拉氏变换叫做一个Q过程。

定理2　设任给一个Q-矩阵Q，矩阵$R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda))$　$(\lambda>0)$为某个Q过程$P(t)=(p_{ij}(t))$的拉氏变换的充要条件是$R(\lambda)$为一个Q-预解式。

证　(1)必要性。

设$P(t)=(p_{ij}(t))$为一个Q过程，$R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda))$表示它的拉氏变换。由(1.1.1)立得(1.1)。又由(1.1.1)、(1.1.3)和定理10.2.6得

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty}\lambda R(\lambda)&=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\ P(t)dt\\&=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\ P\left(\frac{\lambda t}{\lambda}\right)d(\lambda t)\\&=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty e^{-s}P\left(\frac{s}{\lambda}\right)ds\\&=\int_0^\infty e^{-s}Ids=I.\end{aligned}$$

于是(1.3)成立。

我们有恒等式

$$\int_0^\infty e^{-\mu s}P(t+s)\ ds=e^{\mu t}\ R(\mu)-\int_0^t e^{\mu(t-s)}\ P(s)ds.$$

从而　$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}P(t+s)dsdt$$

$$=R(\mu)\int_0^\infty e^{-(\lambda-\mu)t}\,dt-\frac{1}{\lambda-\mu}R(\lambda)$$

$$=R(\mu)\frac{1}{\lambda-\mu}-\frac{1}{\lambda-\mu}R(\lambda)$$

$$=\frac{R(\lambda)-R(\mu)}{\mu-\lambda}。\qquad(1)$$

又根据(1.1.2)可得

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}P(t+s)dsdt=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}P(t)P(s)dsdt$$

$$=R(\lambda)R(\mu)。\qquad(2)$$

由(1)和(2)立得(1.2)。由$|p_{ij}(t)-\delta_{ij}|\leqslant 2$ 及 $p'_{ij}(0)=q_{ij}$知存在$k>0$，使$\left|\frac{p_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t}\right|\leqslant k$，$(t>0)$。于是由定理10.2.6得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda r_{ij}(\lambda)-\delta_{ij})=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty\lambda^2 e^{-\lambda t}(p_{ij}(t)-\delta_{ij})\,dt$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty\frac{t\lambda}{t}e^{-t}\left(p_{ij}\left(\frac{t}{\lambda}\right)-\delta_{ij}\right)dt$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty te^{-t}\frac{p_{ij}\left(\frac{t}{\lambda}\right)-\delta_{ij}}{\frac{t}{\lambda}}dt$$

$$=\int_0^\infty te^{-t}\lim_{\lambda\to\infty}\frac{p_{ij}\left(\frac{t}{\lambda}\right)-\delta_{ij}}{\frac{t}{\lambda}}dt$$

$$=\int_0^\infty te^{-t}q_{ij}dt$$

$$=q_{ij}\int_0^\infty te^{-t}dt$$

$$=q_{ij}。$$

从而(2.1)成立。所以$R(\lambda)$为一个Q-预解式。必要性得证。

(II) **充分性**。

设$R(\lambda)$是一个Q-预解式。由定理10.3.3和定理2.1知，存在$(0,\infty)$上的有界函数$l_{ij}(t)$，使

$$\lambda r_{ij}(\lambda)-\delta_{ij}=\int_0^\infty e^{-\lambda t}l_{ij}(t)dt,\quad(\lambda>0)。$$

即
$$\begin{aligned}
r_{ij}(\lambda)&=\frac{\delta_{ij}}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}l_{ij}(t)dt\\
&=\delta_{ij}\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt+\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt\int_0^\infty e^{-\lambda t}l_{ij}(t)dt\\
&=\delta_{ij}\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt+\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t l_{ij}(s)dsdt\\
&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\delta_{ij}+\int_0^t l_{ij}(s)ds\right)dt。
\end{aligned}$$

令
$$p_{ij}(t)=\delta_{ij}+\int_0^t l_{ij}(s)ds。\tag{3}$$

于是$p_{ij}(t)$与$[0,\infty)$上连续。且

$$r_{ij}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}p_{ij}(t)dt。\tag{4}$$

$$\frac{1}{\lambda}-\sum_{j=0}^{N}r_{ij}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(1-\sum_{j=0}^{N}p_{ij}(t)\right)dt。\tag{5}$$

往证由(3)定义的$P(t)=(p_{ij}(t))$是一个Q过程。由(4)、(5)、$p_{ij}(t)$的连续性、定理1.1、定理1.2和定理10.3.2知

$$p_{ij}(t)\geqslant 0,\quad 1-\sum_{j=0}^{N}p_{ij}(t)\geqslant 0。$$

从而
$$1-\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}(t)\geqslant 0。$$

故(1.1.1)成立。由(3)立得(1.1.3)。又

$$\frac{R(\lambda)-R(\mu)}{\mu-\lambda}=R(\mu)\frac{1}{\lambda-\mu}-R(\lambda)\frac{1}{\lambda-\mu}$$

$$=R(\mu)\int_0^\infty e^{-(\lambda-\mu)t}dt-\frac{1}{\lambda-\mu}R(\lambda)$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{\mu t}R(\mu)\,dt-\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t e^{-\mu(t-s)}P(s)dsdt$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[e^{\mu t}R(\mu)-\int_0^t e^{-\mu(t-s)}P(s)ds\right]dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\int_0^\infty e^{-\mu s}P(t+s)ds\right]dt. \tag{6}$$

$$R(\lambda)R(\mu)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(t)dt\cdot\int_0^\infty e^{-\mu s}P(s)ds$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\int_0^\infty e^{-\mu s}P(t)P(s)ds\right]dt. \tag{7}$$

由(1.2)、(6)及(7)得

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\int_0^\infty e^{-\mu s}P(t+s)ds\right]dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\int_0^\infty e^{-\mu s}P(t)P(s)ds\right]dt.$$

由于(1.1.1)及$P(t)$是$[0,\infty)$上的有界连续函数立知对于任一$\mu>0$，$\int_0^\infty e^{-\mu s}P(t+s)ds$与$\int_0^\infty e^{-\mu s}P(t)P(s)ds$都是$t$的有界连续函数，于是由定理10.3.1知

$$\int_0^\infty e^{-\mu s}P(t+s)\,ds=\int_0^\infty e^{-\mu s}P(t)P(s)ds.$$

同理　　$P(t+s)=P(t)P(s)$。

故(1.1.2)成立。即$P(t)=(P_{ij}(t))$已满足(1.1.1)—(1.1.3)。于是由定理1.3.1知$p'_{ii}(0)$存在。又由(3)及$l_{ii}(t)$是$(0,\infty)$上的有界函数知$|p'_{ii}(0)|\leqslant\sup\limits_{0<t\leqslant 1}l_{ii}(t)<+\infty$。于是由定理1.4.1知$p'_{ij}(0)$存在且有限。故由$|p_{ij}(t)-\delta_{ij}|\leqslant 2$，$|q_{ij}|<+\infty$易知，在$K>0$，使$\left|\frac{p_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t}\right|<K$，$(t>0)$。于是由定理10.2.6知

$$
\begin{aligned}
q_{ij} &= \lim_{\lambda\to\infty}(\lambda(\lambda r_{ij}(\lambda)-\delta_{ij}))\\
&= \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda t}(p_{ij}(t)-\delta_{ij})dt\\
&= \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty \frac{t\lambda}{t}e^{-t}\left(p_{ij}\left(\frac{t}{\lambda}\right)-\delta_{ij}\right)dt\\
&= \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty te^{-t}\frac{p_{ij}\left(\frac{t}{\lambda}\right)-\delta_{ij}}{\frac{t}{\lambda}}dt\\
&= \int_0^\infty te^{-t}\lim_{\lambda\to\infty}\frac{p_{ij}\left(\frac{t}{\lambda}\right)-\delta_{ij}}{\frac{t}{\lambda}}dt\\
&= \lim_{\lambda\to\infty}\frac{p_{ij}\left(\frac{t}{\lambda}\right)-\delta_{ij}}{\frac{t}{\lambda}}\int_0^\infty te^{-t}dt\\
&= p'_{ij}(0)。
\end{aligned}
$$

综合上述论证知$P(t)=(p_{ij}(t))$是一个Q过程，它以Q-预解式$R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda))$为其拉氏变换。故充分性亦得证。至此，定理证毕。

§4 B型Q过程的拉氏变换判别准则

定理1 对于任给的一个Q-矩阵Q，矩阵$R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda))$ $(\lambda>0)$为某个B型Q过程$P(t)=(p_{ij}(t))$的拉氏变换的充要条件是$R(\lambda)$为一个B型Q-预解式。

证 (1) 必要性。

设$P(t)$为一个B型Q过程，以$R(\lambda)$表示$R(t)$的拉氏变换。由定理3.2和(1.7.3)立得条件(i)、(ii)和(iii)″，故$R(\lambda)$是一

个B型Q-预解式。

(II) 充分性。

反之，设$R(\lambda)$ 是一个B型Q-预解式。由引理2.2知，$R(\lambda)$是一个Q-预解式。于是由定理3.2知，存在唯一的Q过程$P(t)$，它以$R(\lambda)$为其拉氏变换。由条件(iii)″得

$$\lambda r_{ij}(\lambda)-\delta_{ij}=\sum_{k\in E}q_{ik}r_{kj}(\lambda)。$$

但 $$\lambda r_{ij}(\lambda)-\delta_{ij}=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}p'_{ij}(t)dt。$$

于是由$p_{ij}(t)\geqslant 0$，$q_{ij}\geqslant 0$ $(i\neq j)$ 及定理10.2.3得

$$\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}p'_{ij}(t)dt=\sum_{k\in E}q_{ik}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}p_{kj}(t)dt$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}q_{ii}p_{ij}(t)dt+\sum_{k\neq i}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}q_{ik}p_{kj}(t)dt$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}q_{ii}p_{ij}(t)dt+\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\sum_{k\neq i}q_{ik}p_{kj}(t)dt$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\sum_{k\in E}q_{ik}p_{kj}(t)dt。$$

由 $$\sum_{k\in E}|q_{ik}p_{kj}(t)|\leqslant\sum_{k\in E}|q_{ik}|\leqslant 2q_i<+\infty$$

以及定理10.1.9知$\sum\limits_{k\in E}q_{ik}p_{kj}(t)$ 是t的有界连续函数。由定理1.4.1知$|p'_{ij}(t)|\leqslant 2q_i$。于是由定理10.3.1知

$$p'_{ij}(t)=\sum_{k\in E}q_{ik}p_{kj}(t),$$

即(1.7.3)满足。从而$P(t)$是一个B型Q过程，它以$R(\lambda)$为其拉

氏变换。

定理证毕。

§5 F型Q过程的拉氏变换判别准则

定理1 对于任给的一个Q矩阵Q，矩阵$R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda))$ ($\lambda>0$)为某个F型Q过程$P(t)=(P_{ij}(t))$的拉氏变换的充要条件是$R(\lambda)$为一个F型Q-预解式。

证 (I)**必要性.**

设$P(t)$为一个F型Q过程，以$R(\lambda)$表示 $P(t)$的拉氏变换。由定理3.2和(1.7.4)取拉氏变换立得条件(i)、(ii)和 (iii)''',故$R(\lambda)$是一个F型Q-预解式。从而必要性得证。

(II) **充分性**

设$R(\lambda)$是一个F型Q-预解式。由引理2.3知，$R(\lambda)$ 是一个Q-预解式，于是由定理3.2知，存在唯一的Q过程$P(t)$，它以$R(\lambda)$为其拉氏变换。由条件(iii)'''得

$$r_{ij}(\lambda)=\frac{\delta_{ij}}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}r_{ij}(\lambda)q_j+\frac{1}{\lambda}\sum_{k\neq j}r_{ik}(\lambda)q_{kj}. \tag{1}$$

于是，由$p_{ij}(t)\geq 0$，$q_{ij}\geq 0(i\neq j)$及定理10.2.3得

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}p_{ij}(t)dt=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\Big[\delta_{ij}-q_j\int_0^t p_{ij}(s)ds+\int_0^t\sum_{k\neq j}p_{ik}(s)q_{kj}ds\Big]dt. \tag{2}$$

即

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\Big[p_{ij}(t)-\delta_{ij}+q_j\int_0^t p_{ij}(s)ds-\int_0^t\sum_{k\neq j}p_{ik}(s)\,q_{kj}ds\Big]dt=0. \tag{3}$$

由定理1.7.2知

$$p'_{ij}(t) \geqslant -p_{ij}(t)\, q_j + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) q_{kj}. \tag{4}$$

于是由定理1.4.1得

$$0 \leqslant \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) q_{kj} \leqslant p'_{ij}(t) + q_j p_{ij}(t)$$

$$\leqslant 2q_i + q_j < +\infty. \tag{5}$$

从而 $$0 \leqslant \int_0^t \sum_{k \neq j} p_{ik}(s) q_{kj} ds \leqslant (2q_i + q_j) t < +\infty. \tag{6}$$

于是由(5)、定理1.2.1和定理10.2.7知，

$$p_{ij}(t) - \delta_{ij} + q_j \int_0^t p_{ij}(s)\, ds - \int_0^t \sum_{k \neq j} p_{ik}(s) q_{kj} ds$$

是非负连续函数。故由(3)可知

$$p_{ij}(t) - \delta_{ij} + q_j \int_0^t p_{ij}(s)\, ds - \int_0^t \sum_{k \neq j} p_{ik}(s) q_{kj} ds = 0.$$

即 $$p_{ij}(t) = \delta_{ij} - q_j \int_0^t p_{ij}(s)\, ds + \int_0^t \sum_{k \neq j} p_{ik}(s) q_{kj} ds. \tag{7}$$

由(6)、(7)和定理10.2.7知，存在零测集$A \subset [0, \infty)$，使

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in E} p_{ik}(t) q_{kj}, \quad t \notin A. \tag{8}$$

取$0 < t \notin A$，则对于$h > 0$，由(5)及定理1.4.3得

$$\sum_{k \in E} p_{ik}(t+h) q_{kj}$$

$$= \sum_{k \neq j} p_{ik}(t+h) q_{kj} + p_{ij}(t+h) q_{jj}$$

$$= \sum_{k \neq j} \Big(\sum_{s \in E} p_{is}(h) p_{sk}(t) \Big) q_{kj} + \sum_{s \in E} p_{is}(h) p_{sj}(t) q_{jj}$$

$$= \sum_{s \in E} p_{is}(h) \sum_{k \in A} p_{sk}(t) q_{kj} + \sum_{s \in E} p_{s}(h) p_{slj}(t) q_{js}$$

$$= \sum_{s \in E} p_{is}(h) \sum_{k \in E} p_{sk}(t) q_{kj}$$

$$= \sum_{s \in E} p_{is}(h) p'_{sj}(t)$$

$$= p'_{ij}(t+h)。$$

所以$t+h \notin A$。由于$\mu(A)=0$，故t可取得任意小，所以对于一切$t>0$，(8)成立。由于$P(t)$为Q过程，故(8)对$t=0$也成立，所以(8)对一切$t \geqslant 0$都成立。从而$P(t)$为F型Q过程，且以$R(\lambda)$为其拉氏变换。定理证毕。

第 4 章

最小 Q 过程及 Q 过程存在定理

§1 一个Q过程的构造

令

$$\left.\begin{aligned} f_{ij}^{(0)}(t) &= \delta_{ij}e^{-q_i t}, \\ f_{ij}^{(n+1)}(t) &= \sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i(t-s)}q_{ik}f_{kj}^{(n)}(s)ds \\ &= \sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i s}q_{ik}f_{kj}^{(n)}(t-s)ds,(n\geqslant 0). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$f_{ij}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_{ij}^{(n)}(t). \qquad (2)$$

定理1 对任给的一个 Q- 矩阵，(2) 式定义一个 Q 过程 $(f_{ij}(t))$。

证 由(1)和(2)知

$$f_{ij}(t)\geqslant 0. \qquad (3)$$

令 $$\sigma_{ij}^{(n)}(t)=\sum_{l=0}^{n}f_{ij}^{(l)}(t). \qquad (4)$$

于是 $$\sigma_{ij}^{(n)}(t)\uparrow f_{ij}(t),(n\uparrow+\infty). \qquad (5)$$

由(1)和(4)得

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{ij}^{(0)}(t)=\delta_{ij}e^{-q_i t};\\&\sigma_{ij}^{(n+1)}(t)=\delta_{ij}e^{-q_i t}+\sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i(t-s)}q_{ik}\sigma_{kj}^{(n)}(s)ds,(n\geqslant 0)。\end{aligned}\right\}(6)$$

由(6)得

$$\sum_{j\in E}\sigma_{ij}^{(0)}(t)=\sum_{j\in E}\delta_{ij}e^{-q_i t}=e^{-q_i t}\leqslant 1。\tag{7}$$

若$\sum\limits_{j\in E}\sigma_{ij}^{(n)}(t)\leqslant 1$，则由(6)及(1.5.1)得

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in E}\sigma_{ij}^{(n+1)}(t)\\&=e^{-q_i t}+\sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i(t-s)}q_{ik}\sum_{j\in E}\sigma_{kj}^{(n)}(s)ds\\&\leqslant e^{-q_i t}+\sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i(t-s)}q_{ik}ds\\&=e^{-q_i t}+\sum_{k\neq i}q_{ik}\int_0^t e^{-q_i(t-s)}ds\\&\leqslant e^{-q_i t}+q_i\int_0^t e^{-q_i(t-s)}ds\\&=e^{-q_i t}+(1-e^{-q_i t})=1。\end{aligned}$$

于是由归纳法知

$$\sum_{j\in E}\sigma_{ij}^{(n)}(t)\leqslant 1,(n\geqslant 0)。\tag{8}$$

由$\sigma_{ij}^{(n)}(t)\uparrow f_{ij}(t)$，定理10.2.3及(8)得

$$\sum_{j\in E}f_{ij}(t)\leqslant 1。\tag{9}$$

现在证明等式

$$f_{ij}^{(n)}(s+t)=\sum_{\gamma=0}^{n}\sum_{k\in E}f_{ik}^{(\gamma)}(s)\cdot f_{kj}^{(n-\gamma)}(t)\tag{10}$$

成立。容易直接验证(10)对$n=0$成立.假定它对n已成立，则由(1)得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\gamma=0}^{n+1}\sum_{k\in E} f_{ik}^{(\gamma)}(s)\cdot f_{kj}^{(n+1-\gamma)}(t)\\
&=\sum_{k\in E} f_{ik}^{(0)}(s)\cdot f_{kj}^{(n+1)}(t)+\sum_{\gamma=1}^{n+1}\sum_{k\in E}\sum_{l\neq i}\\
&\quad\int_0^s e^{-q_i u}q_{il}f_{lk}^{(\gamma-1)}(s-u)\cdot f_{kj}^{(n+1-\gamma)}(t)du\\
&=e^{-q_i s}f_{ij}^{(n+1)}(t)+\sum_{l\neq i}\int_0^s e^{-q_i u}q_{il}\sum_{\gamma=1}^{n+1}\sum_{k\in E} f_{lk}^{(\gamma-1)}(s-u)\cdot\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\cdot f_{kj}^{(n-(\gamma-1))}(t)du\\
&=e^{-q_i s}f_{ij}^{(n+1)}(t)\\
&\quad+\sum_{l\neq i}\int_0^s e^{-q_i u}q_{il}\sum_{\gamma=0}^{n}\sum_{k\in E} f_{lk}^{(\gamma)}(s-u)f_{kj}^{(n-\gamma)}(t)du\\
&=e^{-q_i s}f_{ij}^{(n+1)}(t)+\sum_{l\neq i}\int_0^s e^{-q_i u}q_{il}f_{lj}^{(n)}(s-u+t)du\\
&=e^{-q_i s}\sum_{l\neq i}\int_0^t e^{-q_i w}q_{il}f_{lj}^{(n)}(t-w)dw\\
&\quad+\sum_{l\neq i}\int_0^s e^{-q_i u}q_{il}f_{lj}^{(n)}(s+t-u)du\\
&=\sum_{l\neq i}\int_s^{s+t} e^{-q_i u}q_{il}f_{lj}^{(n)}(s+t-u)du\\
&\quad+\sum_{l\neq i}\int_0^s e^{-q_i u}q_{il}f_{lj}^{(n)}(s+t-u)du\\
&=\sum_{l\neq i}\int_0^{s+t} e^{-q_i u}q_{il}f_{lj}^{(n)}(s+t-u)du\\
&=f_{ij}^{(n+1)}(s+t).
\end{aligned}
$$

所以(10)对$n+1$亦成立，于是由归纳法知(10)成立。由(10)和(2)得

$$
\begin{aligned}
f_{ij}(s+t) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)}(s+t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \sum_{k\in E} f_{ik}^{(r)}(s)\cdot f_{kj}^{(n-r)}(t) \\
&= \sum_{k\in E} \sum_{r=0}^{\infty} f_{ik}^{(r)}(s) \sum_{n=r}^{\infty} f_{kj}^{(n-r)}(t) \\
&= \sum_{k\in E} \sum_{r=0}^{\infty} f_{ik}^{(r)}(s) \sum_{n=0}^{\infty} f_{kj}^{(n)}(t) \\
&= \sum_{k\in E} \left(\sum_{r=0}^{\infty} f_{ik}^{(r)}(s) \right) \sum_{n=0}^{\infty} f_{kj}^{(n)}(t) \\
&= \sum_{k\in E} f_{ik}(s)\cdot f_{kj}(t)。 \qquad (11)
\end{aligned}
$$

由(1)和(2)得

$$\varliminf_{t\to 0} f_{ii}(t) \geqslant \lim_{t\to 0} f_{ii}^{(0)}(t) = 1。$$

但由(3)和(9)得

$$\varlimsup_{t\to 0} f_{ii}(t) \leqslant 1。$$

于是有 $\lim\limits_{t\to 0} f_{ii}(t) = 1$。 (12)

由(9)和(12)得

$$\lim_{t\to 0} f_{ij}(t) = 0, (i\neq j)。 \qquad (13)$$

由(1)和(9)得

$$1 \geqslant f_{ii}(0) \geqslant f_{ii}^{(0)}(0) = 1。$$

于是 $f_{ii}(0) = 1$。 (14)

从而有 $f_{ij}(0) = 0, (i\neq j)$。 (15)

由(3)、(9)、(11)、(12)、(13)、(14)和(15)知$(f_{ij}(t))$是一个马氏过程。

对(6)式两端在$n\uparrow+\infty$下取极限，并注意$\sigma_{ij}^{(n)}(t)\uparrow f_{ij}(t)$ $(n\uparrow+\infty)$及定理10.2.3得

$$f_{ij}(t)=\delta_{ij}e^{-q_it}+\sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i(t-s)}q_{ik}f_{kj}(s)ds$$

$$=\delta_{ij}e^{-q_it}+e^{-q_it}\int_0^t\sum_{k\neq i}e^{q_is}q_{ik}f_{kj}(s)ds. \tag{16}$$

由$(f_{ij}(t))$是马氏过程和定理1.2.1知$f_{ij}(t)$是t的连续函数。由(1.5.1) 知$\sum_{k\neq i}\left|e^{q_is}q_{ik}f_{kj}(s)\right|\leqslant e^{q_iT_0}\sum_{k\neq i}q_{ik}\leqslant e^{q_iT_0}q_i$，$(0\leqslant s\leqslant T_0)$。于是由定理10.1.9知 $\sum_{k\neq i}e^{q_is}q_{ik}f_{kj}(s)$，$(0\leqslant s\leqslant T_0)$是$s$的连续函数。故由定理10.1.7及(16)式的两端对t取导数得

$$f'_{ij}(t)=\sum_{k\in E}q_{ik}f_{kj}(t). \tag{17}$$

在(17)中令$t=0$，得

$$f'_{ij}(0)=q_{ij}. \tag{18}$$

于是由(18) 知，$(f_{ij}(t))$是一个Q过程。定理证毕。

§2 $(f_{ij}(t))$的最小性

仍以$P(t)=(p_{ij}(t))$表任一Q过程，以$r_{ij}(\lambda)$表示$p_{ij}(t)$ 的拉氏变换，以$\varphi_{ij}(\lambda)$表示$f_{ij}(t)$的拉氏变换.

定理1

i) $p'_{ij}(t)\geqslant\sum_{k\in E}q_{ik}p_{kj}(t)$ $\quad(i,j\in E,t\geqslant0)$. (1)

ii) $p_{ij}(t)\geqslant\delta_{ij}e^{-q_it}+\sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i(t-s)}q_{ik}p_{kj}(s)ds$

$$(i,j\in E,t\geqslant 0)。\qquad (2)$$

iii) $r_{ij}(\lambda)\geqslant\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}r_{kj}(\lambda)+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}$

$$(i,j\in E,\lambda>0)。\qquad (3)$$

即 $\lambda r_{ij}(\lambda)\geqslant\delta_{ij}+\sum_{k\in E}q_{ik}r_{kj}(\lambda)\quad(i,j\in E,\lambda>0)。\quad(4)$

iv) $p'_{ij}(t)\geqslant\sum_{k\in E}p_{ik}(t)q_{kj}\qquad(i,j\in E,t\geqslant 0)。\quad(5)$

v) $p_{ij}(t)\geqslant\delta_{ij}e^{-q_jt}+\sum_{k\neq j}\int_0^t p_{ik}(s)q_{kj}e^{-q_j(t-s)}ds$

$$(i,j\in E,t\geqslant 0)。\qquad (6)$$

vi) $r_{ij}(\lambda)\geqslant\sum_{k\neq j}\frac{r_{ik}(\lambda)q_{kj}}{\lambda+q_j}+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_j}\quad(i,j\in E,\lambda>0)。(7)$

即 $\lambda r_{ij}(\lambda)\geqslant\delta_{ij}+\sum_{k\in E}r_{ik}(\lambda)q_{kj}\quad(i,j\in E,\lambda>0)。\qquad(8)$

证 (1) 就是定理1.7.1的结论．由(1)得

$$e^{q_is}p'_{ij}(s)+q_ie^{q_is}p_{ij}(s)\geqslant\sum_{k\neq i}e^{q_is}q_{ik}p_{kj}(s)。$$

即 $(e^{q_is}p_{ij}(s))'\geqslant\sum_{k\neq i}e^{q_is}q_{ik}p_{kj}(s)。\qquad(9)$

从而
$$e^{q_it}p_{ij}(t)-\delta_{ij}\geqslant\int_0^t\sum_{k\neq i}e^{q_is}q_{ik}p_{kj}(s)ds$$
$$=\sum_{k\neq i}\int_0^t e^{q_is}q_{ik}p_{kj}(s)ds$$

即 $p_{ij}(t)\geqslant\delta_{ij}e^{-q_it}+\sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i(t-s)}q_{ik}p_{kj}(s)ds。\qquad(10)$

故(2)成立。对(2)两端取拉氏变换立得(3)和(4)。同理可证定理中其余结论。

定理2

i) $f'_{ij}(t)=\sum_{k\in E}q_{ik}f_{kj}(t)\quad(i,j\in E,\ t\geqslant 0)$, (11)

从而 $(f_{ij}(t))$ 是B型Q过程。

ii) $$f_{ij}(t)=\delta_{ij}e^{-q_it}+\sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i(t-s)}q_{ik}f_{kj}(s)ds$$

$(i,\ j\in E,\ t\geqslant 0)$。 (12)

iii) 对任一j，$\{\varphi_{ij}(\lambda),\ i\in E\}$是非负线性方程组

$$X_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}X_k+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}\quad(i\in E,\ \lambda>0) \tag{13}$$

的最小非负解，从而有

$$\lambda\varphi_{ij}(\lambda)=\delta_{ij}+\sum_{k\in E}q_{ik}\varphi_{kj}(\lambda)\quad(i,j\in E,\ \lambda>0)。 \tag{14}$$

iv) $f'_{ij}(t)=\sum_{k\in E}f_{ik}(t)q_{kj}\quad(i,j\in E,\ t\geqslant 0)$。 (15)

从而$(f_{ij}(t))$是F型Q过程。

V) $$f_{ij}(t)=\delta_{ij}e^{-q_jt}+\sum_{k\neq j}\int_0^t f_{ik}(s)q_{kj}e^{-q_j(t-s)}ds$$

$(i,j\in E,\ t\geqslant 0)$。 (16)

vi) 对任一i，$\{\varphi_{ij}(\lambda),j\in E\}$是非负线性方程组

$$X_j=\sum_{k\neq j}\frac{X_kq_{kj}}{\lambda+q_j}+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_j}\quad(j\in E,\ \lambda>0) \tag{17}$$

的最小非负解。从而有

$$\lambda\varphi_{ij}(\lambda)=\delta_{ij}+\sum_{k\in E}\varphi_{ik}(\lambda)q_{kj}\quad(i,j\in E,\lambda>0)。 \tag{18}$$

证 (12)即(1.16)。(11)即(1.17)。令

$$\left.\begin{aligned} l_{ij}^{(0)}(\lambda)&=\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i},\\ l_{ij}^{(n+1)}(\lambda)&=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}l_{kj}^{(n)}(\lambda)+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i},(n\geqslant 0).\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

从而 $\quad l_{ij}^{(n)}(\lambda)\uparrow\varphi_{ij}(\lambda)$。 (20)

于是由定理2.1.1知，对任一j，$\{\varphi_{ij}(\lambda),i\in E\}$是(13)的最小非负解。令

$$\left.\begin{aligned} \hat{l}_{ij}^{(0)}(\lambda)&=\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_j},\\ \hat{l}_{ij}^{(n+1)}(\lambda)&=\sum_{k\neq j}\frac{l_{ik}^{(n)}(\lambda)q_{kj}}{\lambda+q_j}+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_j},(n\geqslant 0).\end{aligned}\right\}(21)$$

由(19)与(21)知

$$l_{ij}^{(0)}(\lambda)=\hat{l}_{ij}^{(0)}(\lambda)=\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}=\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_j}.$$

$$l_{ii}^{(1)}(\lambda)=\hat{l}_{ii}^{(1)}(\lambda)=\frac{1}{\lambda+q_i}.$$

$$l_{ij}^{(1)}(\lambda)=\hat{l}_{ij}^{(1)}(\lambda)=\frac{q_{ij}}{(\lambda+q_i)(\lambda+q_j)},\quad(i\neq j).$$

于是由定理2.1.1和定理2.3.1知，对任一i，$\{\varphi_{ij}(\lambda),\ j\in E\}$是(17)的最小非负解。由 $(f_{ij}(t))$是一个Q过程。定理3.3.2以及定理3.5.1知，$(f_{ij}(t))$ 是一个F型Q过程，故(15)成立。在条件$f_{ij}(0)=\delta_{ij}$的条件下解方程组 (15),立得(16)。

定理3 若$P(t)=(P_{ij}(t))$为任一Q过程，$R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda))$为其拉氏变换，则

$$f_{ij}(t)\leqslant P_{ij}(t),\quad(i,j\in E,t\geqslant 0).\qquad(22)$$

$$\varphi_{ij}(\lambda)\leqslant r_{ij}(\lambda),\quad(i,j\in E,\ \lambda>0).\qquad(23)$$

证 由定理1知$\{r_{ij}(\lambda),\ i\in E\}$是非负线性不等式

$$X_i\geqslant\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}X_k+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i},\quad(i\in E)$$

的一个非负解。而由定理2知，$\{\varphi_{ij}(\lambda),\ j\in E\}$是非负线性方程组

$$X_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}X_k+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i},\quad (i\in E)$$

的最小非负解。于是由定理2.2.1，立得(23)。再由定理3.2.1立得（22)。定理证毕。

所以，今后我们把（$f_{ij}(t)$）和$\Phi(\lambda)$叫做最小Q过程。

下面我们引入两个记号。

m：为全体有界实数序列$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\\ \vdots\end{pmatrix}$.记$0_1=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\end{pmatrix}$,$\mathbf{1}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \vdots\end{pmatrix}$.

l：为全体满足条件$\sum_{i\in E}|a_i|<+\infty$的实数序列$\boldsymbol{a}=(a_0,a_1,\cdots)$。记$\mathbf{0}_-=(0,0,\cdots)$。

定理4 若$\mathbf{0}_1\leqslant\boldsymbol{Y}\in m$及$(\lambda I-Q)\boldsymbol{Y}=\mathbf{U}\geqslant\mathbf{0}_1$，则$\boldsymbol{Y}\geqslant\Phi(\lambda)\boldsymbol{U}$；进而，如果方程

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda I-Q)\boldsymbol{Y}=\mathbf{0}_1\quad \lambda>0\\ \mathbf{0}_1\leqslant\boldsymbol{Y}\in m\end{array}\right\}\tag{24}$$

只有零解，则$\boldsymbol{Y}=\Phi(\lambda)\boldsymbol{U}$。

证 注意$\boldsymbol{U}\geqslant 0_1$，方程$(\lambda I-Q)\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{U}$可改写成非负线性方程组

$$y_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}y_k}{\lambda+q_i}+\frac{u_i}{\lambda+q_i}\quad(i\in E).\tag{25}$$

于是由定理2，$u_i=\sum_{j\in E}\delta_{ij}u_j$及定理2.2.2知，$\Phi(\lambda)\boldsymbol{U}$是方程(25)的最小非负解，然而$\boldsymbol{Y}$是(25)的非负解，所以有$\boldsymbol{Y}\geqslant\Phi(\lambda)\boldsymbol{U}$。令

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Y}-\Phi(\lambda)\boldsymbol{U}.$$

于是 $\boldsymbol{Z}$ 满足（24），故若（24）只有零解，则 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{0}_1$，即 $\boldsymbol{Y}=\Phi(\lambda)\boldsymbol{U}$。定理证毕。

用类似的方法可证：

定理5 若 $\mathbf{0}_-\leqslant\eta\in l$ 及 $\eta(\lambda I-Q)=\gamma\geqslant\mathbf{0}_-$，则 $\eta\geqslant\gamma\Phi(\lambda)$。进而，如果方程

$$\left.\begin{array}{l}\eta(\lambda I-Q)=\mathbf{0}_-\ \ \lambda>0,\\ \mathbf{0}_-\leqslant\eta\in l\end{array}\right\}\tag{27}$$

只有零解，则 $\eta=\gamma\Phi(\lambda)$。

§3 Q过程、B型Q过程和F型Q过程存在定理

定理1 对任给的一个Q-矩阵，Q过程、B型Q过程和F型Q过程总存在。

证 由定理1.1，定理2.2立得本定理。

§4 关于Φ(λ)的一些进一步性质

令 $$z_i(\lambda)=1-\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda),\ (i\in E,\ \lambda>0).\tag{1}$$

定理1 $$z_i(\lambda)\downarrow 0\ \ (\lambda\uparrow+\infty).\tag{2}$$

即 $$\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\uparrow 1\ \ (\lambda\uparrow+\infty).\tag{3}$$

证 由定理2.2知，$\{\varphi_{ij}(\lambda),\ i\in E\}$ 是非负线性方程组

$$X_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}X_k+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}\ \ (i\in E)$$

的最小非负解，于是由定理2.2.2知，$\left\{\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda),\ i\in E\right\}$ 是

非负线性方程组

$$X_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}X_k+\frac{\lambda}{\lambda+q_i}\quad(i\in E)\tag{4}$$

的最小非负解．又因为$0\leqslant\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\leqslant1$，所以$\{z_i(\lambda),\ i\in E\}$是非负线性方程组

$$\left.\begin{aligned}&Z_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}Z_k+\frac{-\sum_{j\in E}q_{ij}}{\lambda+q_i}\quad(i\in E)\\&0\leqslant Z_i\leqslant1\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

的最大解，并且此最大解可由下列方式得到

$$\left.\begin{aligned}&z_i^{(0)}(\lambda)\equiv1,\\&z^{(n+1)}(\lambda)=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}z_k^{(n)}(\lambda)+\frac{-\sum_{j\in E}q_{ij}}{\lambda+q_i},(i\in E,n\geqslant0).\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

则 $$z_i^{(n)}(\lambda)\downarrow z_i(\lambda)\quad(n\uparrow+\infty).\tag{7}$$

由(6)和(7)知，当λ增大时，$z_i(\lambda)$不增，即$\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)$不减．

又由$\left\{\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda),\ i\in E\right\}$是(4)的最小非负解知

$$\frac{\lambda}{\lambda+q_i}\leqslant\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\leqslant1\quad(i\in E).$$

于是 $$\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\uparrow1\quad(\lambda\uparrow+\infty).$$

从而 $$z_i(\lambda)\downarrow0\quad(\lambda\uparrow+\infty).$$

定理证毕．

定理2 $$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda z_i(\lambda)=q_i-\sum_{k\neq i}q_{ik}\quad(i\in E).\tag{8}$$

证 在定理1的证明中曾指出，$\{z_i(\lambda), i\in E\}$满足（5），即

$$\lambda z_i(\lambda) = -q_i z_i(\lambda) + \sum_{k\neq i} q_{ik} z_k(\lambda) + q_i - \sum_{j\neq i} q_{ij}, (i\in E).$$

于是由定理1立得(8)。定理证毕

定理3 若令

$$\boldsymbol{Z}(\lambda) = 1 - \lambda\Phi(\lambda)1 = \begin{pmatrix} z_0(\lambda) \\ z_1(\lambda) \\ \vdots \end{pmatrix},$$

则，i) $\boldsymbol{Z}(\lambda) - \boldsymbol{Z}(\mu) - (\mu-\lambda)\Phi(\lambda)\boldsymbol{Z}(\mu) = \mathbf{0}_1$。 (9)

ii) $\boldsymbol{Z}(\lambda) \equiv \mathbf{0}_1 \quad (\lambda > 0)$

的充要条件是对某个$\lambda_0 > 0$使

$$\boldsymbol{Z}(\lambda_0) = \mathbf{0}_1. \tag{10}$$

iii) 若对某个$i_0\in E$，有$\sum_{j\in E} q_{i_0 j} < 0$，则

$$z_{i_0}(\lambda) > 0 \quad (\lambda > 0).$$

证 由$\Phi(\lambda)$为一Q过程的拉氏变换及定理3.3.2知

$$\Phi(\lambda) - \Phi(\mu) + (\lambda-\mu)\Phi(\lambda)\Phi(\mu) = 0.$$

于是 $0 = \mu\Phi(\lambda)1 - \mu\Phi(\mu)1 - (\mu-\lambda)\Phi(\lambda)\mu\Phi(\mu)1,$

从而 $1 - \lambda\Phi(\lambda)1 = -\lambda\Phi(\lambda)1 + \mu\Phi(\lambda)1 + 1 - \mu\Phi(\mu)1 - (\mu-\lambda)\Phi(\lambda)\mu\Phi(\mu)1,$

即 $(1 - \lambda\Phi(\lambda)1) = (1 - \mu\Phi(\mu)1) + (\mu-\lambda)\Phi(\lambda)1 - (\mu-\lambda)\Phi(\lambda)\mu\Phi(\mu)1,$

即 $(1 - \lambda\Phi(\lambda)1) = (1 - \mu\Phi(\mu)1) + (\mu-\lambda)\Phi(\lambda)(1 - \mu\Phi(\mu)1),$

即 $\boldsymbol{Z}(\lambda) = \boldsymbol{Z}(\mu) + (\mu-\lambda)\Phi(\lambda)\boldsymbol{Z}(\mu),$

即 $\boldsymbol{Z}(\lambda) - \boldsymbol{Z}(\mu) + (\lambda-\mu)\Phi(\lambda)\boldsymbol{Z}(\mu) = \mathbf{0}_1$

于是i）真。

现在证明ii)。显然只需证条件的充分性。

若对某个$\lambda_0 > 0$，（10）成立，于是由(9)得

$$\boldsymbol{Z}(\lambda)=\boldsymbol{Z}(\lambda_0)+(\lambda_0-\lambda)\Phi(\lambda)\boldsymbol{Z}(\lambda_0)$$
$$=\boldsymbol{0}_1+(\lambda_0-\lambda)\Phi(\lambda)\boldsymbol{0}_1=\boldsymbol{0}_1,$$
从而条件的充分性得证。故ii）真。

下面证明iii)．在定理1的证明中曾指出，$\left\{\lambda\sum\limits_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda),i\in E\right\}$

是方程(4)的最小非负解。于是，由于$0\leqslant\lambda\sum\limits_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\leqslant1(\lambda>0,$ $i\in E)$ 得

$$\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{i_1j}(\lambda)\leqslant\sum_{k\neq i_1}\frac{q_{i_1k}}{\lambda+q_{i_1}}+\frac{\lambda}{\lambda+q_{i_1}}=\frac{\lambda+\sum\limits_{k\neq i_1}q_{i_1k}}{\lambda+q_{i_1}}<1.$$

从而，由(1)知iii）真。定理证毕。

定理4 设$\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\cdots)\geqslant\boldsymbol{0}_-$，令$\eta(\lambda)=\alpha\Phi(\lambda)$，则

$$\eta(\lambda)\geqslant\boldsymbol{0}_- \qquad (11)$$

$$\eta(\lambda)-\eta(\mu)+(\lambda-\mu)\eta(\mu)\Phi(\lambda)=\boldsymbol{0}_- \qquad (12)$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta(\lambda)=\alpha \qquad (13)$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta(\lambda)\boldsymbol{1}=\alpha\boldsymbol{1} \qquad (14)$$

证 由$\alpha\geqslant\boldsymbol{0}_-$立得（11）。由$\Phi(\lambda)$为$Q$过程的拉氏变换及定理3.3.2知

$$\Phi(\lambda)-\Phi(\mu)+(\lambda-\mu)\Phi(\mu)\Phi(\lambda)=0. \qquad (15)$$

在（15）的两端左乘以α立得(12)。由$\varphi_{ij}(\lambda)\downarrow0$ $(\lambda\uparrow+\infty)$ 及定理10.2.4立得

$$\eta(\lambda)\downarrow\boldsymbol{0}_-. \qquad (16)$$

由定理2.2和定理2.2.2

$$\eta_j(\lambda)=\sum_{k\neq j}\frac{\eta_k(\lambda)q_{kj}}{\lambda+q_j}+\frac{\alpha_j}{\lambda+q_j},$$

即 $$\lambda\eta_j(\lambda)=\alpha_j-q_j\eta_j(\lambda)+\sum_{k\neq j}\eta_k(\lambda)q_{kj}.$$

于是由(16)及定理10.2.4立得 (13)。由

$$\lambda\eta(\lambda)1=\lambda\alpha\Phi(\lambda)1=\lambda\sum_{j\in E}\left(\sum_{i\in E}a_i\varphi_{ij}(\lambda)\right)$$

$$=\sum_{i\in E}a_i\left(\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\right)$$

和定理1以及定理10.2.3立得 (14)。定理证毕。

定理5 若Q保守，则$\boldsymbol{Z}(\lambda)=\boldsymbol{1}-\lambda\Phi(\lambda)\boldsymbol{1}$是方程

$$\left.\begin{aligned}&(\lambda I-Q)\boldsymbol{U}=\boldsymbol{0}_1\quad \lambda>0\\&\boldsymbol{0}_1\leqslant\boldsymbol{U}\leqslant\boldsymbol{1}\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

的最大解. 从而$\boldsymbol{Z}(\lambda)\equiv\boldsymbol{0}_1$的充要条件是 (17) 只有零解。

证 由定理1的证明过程知$(z_i(\lambda),i\in E)$ 是方程(5)的最大解. 注意Q保守，方程(5)即方程(17)。于是定理得证。

定理6 对一切$\lambda>0$,

$$\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)=c(\lambda)>0\tag{18}$$

成立的充要条件是它对某个常数λ_0成立。

证 显然，只要证明条件的充分性. 下面分两种情况来证明.

(i) $0<\lambda<\lambda_0$。

由$\varphi_{ij}(\lambda)$为λ的非增函数，得

$$c(\lambda)>\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda_0)=\frac{\lambda}{\lambda_0}c(\lambda_0)>0.$$

(ii) $\lambda_0\leqslant\lambda<+\infty$。

由定理1得

$$c(\lambda)\geqslant c(\lambda_0)>0.$$

于是(18)成立. 定理得证。

定理7 存在与λ无关的行向量$\alpha>0_-$，使$\alpha\Phi(\lambda)\boldsymbol{1}<+\infty$，而$\alpha\boldsymbol{1}=+\infty$的充要条件是

$$\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)=c(\lambda)=0,\ (0<\lambda<+\infty)。\tag{19}$$

或等价地(由定理6)存在某一个常数$0<\lambda_0<+\infty$，使

$$\inf_{i\in E}\lambda_0\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda_0)=c(\lambda_0)=0。\tag{20}$$

证 先证充分性。

由于

$$0<\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\leqslant 1。$$

故使 $\alpha\Phi(\lambda)1=\sum_{i\in E}\sum_{j\in E}\alpha_i\varphi_{ij}(\lambda)$

$$=\frac{1}{\lambda}\sum_{i\in E}\alpha_i\left(\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\right)<+\infty$$

之$\alpha>0_-$是存在的，如选$\alpha(i)=2^{-i}(i\in E)$。所以我们下面假定已选了一行矢量$\alpha>0_-$，它已使$\alpha\Phi(\lambda)1<+\infty$。任选定一个常数$0<\bar{\lambda}_0<+\infty$，由于(19)，可选$E$的无穷子集$\hat{E}$，使

$$\sum_{i\in\hat{E}}\bar{\lambda}_0\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\bar{\lambda}_0)<+\infty。$$

令 $\hat{E}_1=(i:\ i\in\hat{E},\ \alpha(i)>1)$，

$\hat{E}_2=(i:\ i\in\hat{E},\ \alpha(i)\leqslant 1)$，

$$\hat{\alpha}(i)=\begin{cases}\alpha(i), & i\in E\setminus\hat{E}_2\\ 1, & i\in\hat{E}_2,\end{cases}$$

则 $\hat{\alpha}(i)\geqslant\alpha(i)>0\ (i\in E)$

$$\sum_{i\in E}\hat{\alpha}(i)\bar{\lambda}_0\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\bar{\lambda}_0)$$

$$= \sum_{i\in E\setminus \hat{F}_1} \hat{a}(i)\bar{\lambda}_0 \sum_{j\in E} \varphi_{ij}(\bar{\lambda}_0) + \sum_{i\in \hat{E}_1} \bar{\lambda}_0 \sum_{j\in E} \varphi_{ij}(\bar{\lambda}_0)$$

$$\leqslant \sum_{i\in E} a(i)\bar{\lambda}_0 \sum_{j\in E} \varphi_{ij}(\bar{\lambda}_0) + \sum_{i\in \hat{E}} \bar{\lambda}_0 \sum_{j\in E} \varphi_{ij}(\bar{\lambda}_0) < +\infty$$

$$\sum_{i\in E} \hat{a}(i) \geqslant \sum_{i\in \hat{E}} a(i) \geqslant \sum_{i\in \hat{E}} 1 = +\infty。$$

参考定理6的证明，易知，对于$0<\lambda<+\infty$有

$$\sum_{i\in E} \hat{a}(i)\lambda \sum_{j\in E} \varphi_{ij}(\lambda) < +\infty。$$

于是充分性得证。

再证**必要性**

若(20)不成立，由定理6知，这时有

$$\inf_{i\in E} \lambda \sum_{j\in E} \varphi_{ij}(\lambda) = c(\lambda) > 0 \quad (0<\lambda<+\infty)。 \tag{21}$$

若有$a>0$使

$$\sum_{i\in E} a(i)\lambda \sum_{j\in E} \varphi_{ij}(\lambda) < +\infty \quad (0<\lambda<+\infty)。 \tag{22}$$

则由(21)得

$$\sum_{i\in E} a(i)\lambda \sum_{j\in E} \varphi_{ij}(\lambda) \geqslant c(\lambda) \sum_{i\in E} a(i) \quad (0<\lambda<+\infty)。 \tag{23}$$

由(21)、(22)和(23)得

$$\sum_{i\in E} a_i < +\infty。$$

于是，必要性得证。定理证毕。

定理 8 若(18)成立，则方程

$$\left.\begin{array}{l} \lambda \boldsymbol{U} - Q\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}_1 \quad (\lambda>0) \\ \boldsymbol{0}_1 \leqslant \boldsymbol{U} \leqslant \boldsymbol{1} \end{array}\right\} \tag{24}$$

只有零解。

证 由$\Phi(\lambda)$为B型Q过程及定理3.4.1知

$$(\lambda I-Q)\Phi(\lambda)=1。\tag{25}$$

从而 $$(\lambda I-Q)\Phi(\lambda)1=1。\tag{26}$$

假定$\boldsymbol{U}$是(24)的一个解，根据(18)，存在$k>0$，使$\boldsymbol{U}\leqslant k\nu$。这里$\nu=\lambda\Phi(\lambda)1$。于是$0_1\leqslant k\nu-\boldsymbol{U}\in m$，注意(26)得$(\lambda I-Q)(k\nu-\boldsymbol{U})=(\lambda I-Q)k\lambda\Phi(\lambda)1-0_1=k\lambda 1$。再根据定理2.4得$k\nu-\boldsymbol{U}\geqslant\Phi(\lambda)(k\lambda 1)=k\nu$。从而$\boldsymbol{U}\leqslant 0_1$，故必有$\boldsymbol{U}=0_1$。定理得证。

定理 9

(a) 若列矢量$\boldsymbol{U}$满足$\Phi(\lambda)\boldsymbol{U}=0_1$（此即对每个$i$，有$\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)u_j=0$，这个级数绝对收敛），则$\boldsymbol{U}=0_1$。

(b) 关行矢量α满足$\alpha\Phi(\lambda)=0_-$（此即对每个j，有$\sum_{i\in E}a_i\varphi_{ij}(\lambda)=0$，这个级数绝对收敛），则$\alpha=0_-$。

证 由定理2.2知

$$\varphi_{ij}(\lambda)=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}\varphi_{kj}(\lambda)}{\lambda+q_i}+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}。$$

从而，由定理10.3.1和$\sum_j\varphi_{ij}(\lambda)u_j$绝对收敛得

$$\begin{aligned}0&=\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)u_j\\&=\sum_{j\in E}\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}\varphi_{kj}(\lambda)u_j}{\lambda+q_i}+\sum_{j\in E}\frac{\delta_{ij}u_j}{\lambda+q_i}\\&=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\sum_{j\in E}\varphi_{kj}u_j+\frac{u_i}{\lambda+q_i}\\&=0+\frac{u_i}{\lambda+q_i}。\end{aligned}$$

故 $u_i=0\ (i\in E)$。

于是(a)得证。用类似的方法可完成(b)的证明。定理得证。

第 5 章

B 型 Q 过程的唯一性准则

§1 两个引理

引理1 若$\eta(\lambda)\geqslant 0$，$\eta(\lambda)\in l$，且

$$\eta(\lambda)-\eta(\mu)+(\lambda-\mu)\eta(\mu)\Phi(\lambda)=0 \quad (\lambda,\mu>0), \quad (1)$$

则$\mu_j(\lambda)\downarrow 0(\lambda\uparrow+\infty)$，及$\lambda\sum_{j\in E}\eta_j(\lambda)$是$\lambda$的非减函数，从而极限$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\sum_{j\in E}\eta_j(\lambda)$存在且这个极限等于0的充要条件是

$$\eta_j(\lambda)\equiv 0 \quad (\lambda>0,\ j\in E)。$$

证 由$(\varphi_{ij}(\lambda))$为一Q过程及定理3.3.2知，$\varphi_{ij}(\lambda)\downarrow 0$ $(\lambda\uparrow+\infty)$且

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\varphi_{ij}(\lambda)=\delta_{ij}。$$

于是由$\eta(\lambda)\in l$，定理10.1.8及(1)得$\eta_j(\lambda)\downarrow(\lambda\uparrow+\infty)$及

$$\lim_{\lambda\to\infty}\eta_j(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}\Big(\eta_j(\mu)+\mu\sum_{i\in E}\eta_i(\mu)\varphi_{ij}(\lambda)-\sum_{i\in E}\eta_i(\mu)\lambda\varphi_{ij}(\lambda)\Big)$$

$$=\eta_j(\mu)+\mu\sum_{i\in E}\eta_i(\mu)\lim_{\lambda\to\infty}\varphi_{ij}(\lambda)-\sum_{i\in E}\eta_i(\mu)\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\varphi_{ij}(\lambda)$$

$$=\eta_j(\mu)+0-\sum_{i\in E}\eta_i(\mu)\delta_{ij}$$

$$=\eta_i(\mu)-\eta_i(\mu)=0。$$

由(1)得

$$\begin{aligned}\lambda\eta(\lambda)1&=\lambda\eta(\mu)1+(\mu-\lambda)\lambda\eta(\mu)\Phi(\lambda)1\\&=\lambda\eta(\mu)1+(\mu-\lambda)\eta(\mu)(1-(1-\lambda\Phi(\lambda)1))\\&=\mu\eta(\mu)1+(\lambda-\mu)\eta(\mu)(1-\lambda\Phi(\lambda)1)\end{aligned}$$

于是$\lambda\eta(\lambda)1=\lambda\sum_E\eta_i(\lambda)$是$\lambda$的非减函数。从而引理得证。

引理2 设任给一个Q-矩阵，若

$$\lambda\Phi(\lambda)1\neq 1 \tag{2}$$

及行向量$\eta(\lambda)\geqslant 0_-$，$\eta(\lambda)\neq 0_-$，$\eta(\lambda)\in l$且

$$\eta(\lambda)-\eta(\mu)+(\lambda-\mu)\eta(\mu)\Phi(\lambda)=0_-\quad(\lambda,\mu>0), \tag{3}$$

则

$$R(\lambda)=\Phi(\lambda)+\frac{Z(\lambda)\eta(\lambda)}{\lambda\eta(\lambda)1} \tag{4}$$

满足条件

$$R(\lambda)\geqslant 0_-,\ \lambda R(\lambda)1=1, \tag{5}$$

$$R(\lambda)-R(\mu)+(\lambda-\mu)R(\lambda)R(\mu)=0, \tag{6}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda R(\lambda)=I, \tag{7}$$

以及

$$R(\lambda)\neq\Phi(\lambda)。 \tag{8}$$

证 由(3)知

$$\eta(\lambda)\neq 0_-\quad(\lambda>0)。 \tag{9}$$

由(2)、(9)和定理4.4.3知(8)成立。(5)也显然成立。由定理4.4.1知$\Phi(\lambda)$为一个Q过程。于是由定理3.3.2知

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\Phi(\lambda)=I。$$

由定理4.3.2和引理1知

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda Z(\lambda)\eta(\lambda)}{\lambda\eta(\lambda)1}=\frac{\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda Z(\lambda)\lim\limits_{\lambda\to\infty}\eta(\lambda)}{\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\eta(\lambda)1}=0。 \tag{10}$$

于是(7)真。往证(6)真。令

$$m_\lambda = \frac{1}{\lambda\eta(\lambda)1}。\quad (11)$$

$$\xi(\lambda) = m_\lambda \mathbf{Z}(\lambda)。\quad (12)$$

$$A(\mu,\lambda) = I + (\mu-\lambda)\Phi(\lambda)。\quad (13)$$

于是(3)和(4.4.9)分别变成

$$\eta(\mu)A(\mu,\lambda) = \eta(\lambda)$$

和

$$\mathbf{Z}(\lambda) = A(\mu,\lambda)\mathbf{Z}(\mu)。\quad (14)$$

又

$$m_\lambda(1 + (\lambda-\mu)\eta(\lambda)m_\mu\mathbf{Z}(\mu))$$

$$= \frac{1}{\lambda\eta(\lambda)1}\left(1 + (\lambda-\mu)\frac{\eta(\lambda)\mathbf{Z}(\mu)}{\mu\eta(\mu)1}\right)$$

$$= \frac{\mu\eta(\mu)1 + (\lambda-\mu)\eta(\lambda)\mathbf{Z}(\mu)}{(\lambda\eta(\lambda)1)(\mu\eta(\mu)1)}$$

$$= \frac{\mu\eta(\mu)1 + (\lambda-\mu)\eta(\lambda)(1-\mu\Phi(\mu)1)}{(\lambda\eta(\lambda)1)(\mu\eta(\mu)1)}$$

$$= \frac{\mu\eta(\mu)1 + (\lambda-\mu)\eta(\lambda)1 + \mu(\mu-\lambda)\eta(\lambda)\Phi(\mu)1}{(\lambda\eta(\lambda)1)(\mu\eta(\mu)1)}$$

$$= \frac{\mu\eta(\mu)1 + \lambda\eta(\lambda)1 - \mu\eta(\lambda)1 + \mu(\eta(\lambda)-\eta(\mu))1}{(\lambda\eta(\lambda)1)(\mu\eta(\mu)1)}$$

$$= \frac{1}{\mu\eta(\mu)1} = m_\mu。\quad (15)$$

由(4)、(11)、(12)、(13)、(14)以及(15)知

$$R(\lambda) - R(\mu) + (\lambda-\mu)R(\lambda)R(\mu)$$

$$= \xi(\lambda)\eta(\lambda) - \xi(\mu)\eta(\mu) + (\lambda-\mu)(\Phi(\lambda)\xi(\mu)\eta(\mu) +$$

$$+ \xi(\lambda)\eta(\lambda)\xi(\mu)\eta(\mu) + \xi(\lambda)\eta(\lambda)\Phi(\mu))$$

$$= \xi(\lambda)[\eta(\lambda) + (\lambda-\mu)\eta(\lambda)\Phi(\mu)] - [I + (\mu-\lambda)\Phi(\lambda)]$$

$$\cdot \xi(\mu)\eta(\mu) - (\mu-\lambda)\xi(\lambda)\eta(\lambda)\xi(\mu)\eta(\mu)$$

$$-(\xi(\lambda) - A(\mu,\lambda)\xi(\mu) - (\mu-\lambda)\xi(\lambda)\eta(\lambda)\xi(\mu))\eta(\mu)$$

$$= \{\xi(\lambda)[1 + (\lambda-\mu)\eta(\lambda)\xi(\mu)] - A(\mu,\lambda)\xi(\mu)\}\eta(\mu)$$

$$= \{\mathbf{Z}(\lambda)m_\lambda[1+(\lambda-\mu)\eta(\lambda)m_\mu\mathbf{Z}(\mu)]-\mathbf{Z}(\lambda)m_\mu\}\eta(\mu)$$

$$= \mathbf{Z}(\lambda)\{m_\lambda[1+(\lambda-\mu)\eta(\lambda)m_\mu\mathbf{Z}(\mu)]-m_\mu\}\eta(\mu)=0。$$

于是(6)成立。至此，引理证毕。

§2 *Doob*过程

本节假定Q保守。

定理1 设方程

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\boldsymbol{U}-Q\boldsymbol{U}=\mathbf{0}_1,\ \lambda>0\\ \mathbf{0}_1\leqslant\boldsymbol{U}\leqslant 1\end{array}\right\} \qquad (1)$$

有非零解及$\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\cdots)\geqslant\mathbf{0}_-$，$\alpha\neq\mathbf{0}_-$，$\alpha\Phi(\lambda)1<+\infty$，则

$$R(\lambda)=\Phi(\lambda)+Z(\lambda)\frac{\alpha\Phi(\lambda)}{\lambda\alpha\Phi(\lambda)1} \qquad (2)$$

是一个异于$\Phi(\lambda)$的(B型)Q过程。

证 由(1)有非零解和定理4.4.5知(1.2)成立，于是由引理1.2和定理4.4.4，$R(\lambda)$满足(1.5)、(1.6)、(1.7)及(1.8)。由$\Phi(\lambda)$为B型Q过程知

$$\lambda I-Q\Phi(\lambda)=I。 \qquad (3)$$

又由Q保守及定理4.4.5知

$$(\lambda I-Q)\boldsymbol{z}(\lambda)=\mathbf{0}_1。 \qquad (4)$$

从而 $$(\lambda I-Q)R(\lambda)=I。 \qquad (5)$$

由(1.5)、(1.6)、(5)、(1.8)和定理3.4.1知，$R(\lambda)$是一个异于$\Phi(\lambda)$的(B型)Q过程。定理证毕。

定义1 对任给的一个Q-矩阵，若(1)有非零解，则由(2)定义的Q过程叫做*Doob*过程。

§3 问题的归结

令$\hat{E}=(-1)\cup E$及

$$
\hat{q}_{ij}=\begin{cases} q_{ij} & (i,\ j\in E), \\ q_i-\sum\limits_{k\in E} q_{ik} & (i\in E, j=-1), \\ 0 & (i=-1,\ j\in \hat{E}). \end{cases} \tag{1}
$$

$$
\hat{Q}=(\hat{q}_{ij},\ i,\ j\in \hat{E}). \tag{2}
$$

显然，$\hat{Q}$是一个保守的Q矩阵．

定理1 设$\hat{P}(t)=(\hat{p}_{ij}(t);\ i,\ j\in \hat{E})$是一个$\hat{Q}$过程．令

$$p_{ij}(t)=\hat{p}_{ij}(t)\quad i,\ j\in E,$$
$$P(t)=(p_{ij}(t);\ i,\ j\in E),$$

则$P(t)$是一个B型Q过程．

证 (1.1.1)、(1.1.3)和(1.1.4)显然成立．由$\hat{Q}$保守及定理1.7.3知$\hat{P}(t)$是B型$\hat{Q}$过程．于是由(1)知

$$
p_{-1,j}(t)=\sum_{k\in E} q_{-1,k}\,\hat{p}_{kj}(t)=\sum_{k\in E} 0\cdot \hat{P}_{kj}(t)=0 \quad (j\in E).
$$

再由$p_{-1,j}(0)=0$及$p_{-1,j}(t)$在$[0,\infty)$上连续知

$$
p_{-1,j}(t)\equiv 0\quad (j\in E,\ t\geqslant 0). \tag{3}
$$

由$\hat{P}(t)$是一个B型$\hat{Q}$过程及(3)知(1.1.2)和(1.7.3)成立．所以$P(t)$是一个B型Q过程．定理证毕．

§4 B型Q过程的唯一性准则

定理1 对任给的一个Q-矩阵，B型Q过程唯一的充要条件是方程

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda I-Q)\boldsymbol{U}=\boldsymbol{0}_1,\ \lambda>0\\ \boldsymbol{0}_1\leqslant\boldsymbol{U}\leqslant 1\end{array}\right\}\tag{1}$$

只有零解。

证 (I)充分性。

设(1)只有零解。以$R(\lambda)=(\gamma_{ij}(\lambda))$表示任一$B$型$Q$过程。令

$$w_{ij}(\lambda)=\frac{1}{\lambda}(\gamma_{ij}(\lambda)-\varphi_{ij}(\lambda))\geqslant 0.$$

于是，由于$\Phi(\lambda)$也是一个B型Q过程及定理3.4.1知，对任一$j\in E$，$\{w_{ij}(\lambda),\ i\in E\}$是方程(1)的解。然而，由(1)只有零解知$w_{ij}(\lambda)\equiv 0$，即

$$\gamma_{ij}(\lambda)=\varphi_{ij}(\lambda).\tag{2}$$

故除$\Phi(\lambda)$外再无其他B型Q过程。

(II) 必要性。

设(1)有非零解。以$\hat{\Phi}(\lambda)=(\hat{\varphi}_{ij}(\lambda);\ i,\ j\in E)$表示最小$\hat{Q}$过程。由定理3.1知$(\hat{\varphi}_{ij}(\lambda);\ i,j\in E)$是一个$Q$过程。由定理4.2.3知

$$\hat{\varphi}_{ij}(\lambda)\geqslant\varphi_{ij}(\lambda).\tag{3}$$

考虑方程

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\hat{u}_i-\sum\limits_{k\in E}\hat{q}_{ik}\hat{u}_k=0\quad(\lambda>0,\ i\in\hat{E}),\\ 0\leqslant\hat{u}_i\leqslant 1.\end{array}\right\}\tag{4}$$

由$q_{-1,i}=0$ $(j\in \hat{E})$ 得 $\hat{u}_{-1}(\lambda)\equiv 0$。所以（4）变成下列两个独立的方程

$$\left.\begin{array}{l}\lambda \hat{u}_i-\sum\limits_{k\in E} q_{ik}\hat{u}_k=0 \quad (\lambda>0,\ i\in E)\\ 0\leqslant \hat{u}_i\leqslant 1\end{array}\right\} \tag{5}$$

和
$$\hat{u}_{-1}(\lambda)\equiv 0 \quad (\lambda>0). \tag{6}$$

方程（5）即方程（1）。于是由假设知，存在(5）的解 $\hat{u}(\lambda)$ $(\lambda\in E)$，使

$$0\leqslant \hat{u}_i(\lambda)\not\equiv 0 \ (\lambda>0,\ i\in E).$$

从而（4）有非零解。令

$$\hat{z}(\lambda)=1-\lambda\hat{\Phi}(\lambda)1, \tag{7}$$

$$\hat{\alpha}=(\alpha_{-1},\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \cdots)>0_{-}, \tag{8}$$

$$\hat{R}(\lambda)=\hat{\Phi}(\lambda)+\hat{z}(\lambda)\frac{\hat{\alpha}\,\hat{\Phi}(\lambda)}{\lambda\hat{\alpha}\,\hat{\Phi}(\lambda)1} \tag{9}$$

由定理3.1知，$\hat{R}(\lambda)=(\hat{r}_{ij}(\lambda);\ i,\ j\in E)$ 是一个B型Q过程。由（4）有非零解、$\hat{Q}$保守及定理4.4.5知

$$\hat{z}_i(\lambda)\not\equiv 0 \ (i\in \hat{E},\ \lambda>0). \tag{10}$$

由（6）和定理4.4.5知

$$\hat{z}_{-1}(\lambda)\equiv 0. \tag{11}$$

由（10）和（11）知

$$\hat{z}_i(\lambda)\not\equiv 0 \ (i\in E,\ \lambda>0). \tag{12}$$

由（11）、（12）和定理4.4.3知

$$\hat{z}_i(\lambda)>0 \ (i\in E,\ \lambda>0). \tag{13}$$

于是由$\hat{\alpha}>0_-$、(3) 和 (13) 知

$$\hat{r}_{ij}(\lambda)\neq\varphi_{ij}(\lambda)\quad(i,\ j\in E,\ \lambda>0)。\qquad(14)$$

所以 $\hat{R}(\lambda)=(\hat{r}_{ij}(\lambda),\ i,\ j\in E)$是异于最小$Q$过程$\Phi(\lambda)$的$B$型$Q$过程，充分性得证。定理证毕。

定理2 最小Q过程为诚实的充要条件是Q保守且方程(1)只有零解。

证 若最小Q过程诚实，则由定理1和定理4.4.3 知 Q保守且方程 (1) 只有零解。

反之，设Q保守且方程 (1) 只有零解，则由(1) 只有零解和定理4.2.4知方程

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda I-Q)\eta=\lambda 1\quad(\lambda>0)\\ 0_-\leqslant\eta\leqslant 1\end{array}\right\}\qquad(15)$$

有唯一的解$\eta=\lambda\Phi(\lambda)1$.但由$Q$保守可直接验证$\eta=1$满足(15)。所以$\lambda\Phi(\lambda)1=1$，即$\Phi(\lambda)$是诚实的. 定理证毕。

第 6 章

F型Q过程唯一性准则

§1 若干引理

引理1 若

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\eta-\eta Q=0_-\quad \lambda>0\\ 0_-\leqslant\eta,\ \ \eta 1<+\infty\end{array}\right\}\tag{1}$$

有非零解，则可造一个非零解$\eta(\lambda)$，使其满足如下条件

$$\eta(\lambda)=\eta(\mu)A(\mu,\ \lambda).\tag{2}$$

证 设（1）有非零解，因此存在$\lambda_0>0$及$\xi(\lambda_0)$使

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_0\xi(\lambda_0)-\xi(\lambda_0)Q=0_-\\ 0_-\leqslant\xi(\lambda_0),\ \ \xi(\lambda_0)1<+\infty\end{array}\right\}\tag{3}$$

成立。对任一$\lambda>0$，令

$$\eta(\lambda)=\xi(\lambda_0)A(\lambda_0,\ \lambda).\tag{4}$$

由于$A(\lambda_0,\ \lambda)=I$，所以$\eta(\lambda_0)=\xi(\lambda_0)$。若$\lambda_0>\lambda$，则

$$\eta(\lambda)=\eta(\lambda_0)(I+(\lambda_0-\lambda)\Phi(\lambda))\geqslant 0_-$$

若$\lambda_0<\lambda$，则由$\eta(\lambda_0)(\lambda_0I-Q)=0$得

$$\eta(\lambda_0)(\lambda I-Q)=(\lambda-\lambda_0)\eta(\lambda_0)\geqslant 0_-.$$

于是由定理4.2.5得

$$\eta(\lambda_0)\geqslant(\lambda-\lambda_0)\eta(\lambda_0)\Phi(\lambda).$$

因此　　$\eta(\lambda)=\eta(\lambda_0)A(\lambda_0,\lambda)=\eta(\lambda_0)(I+(\lambda_0-\lambda)\Phi(\lambda))\geqslant 0_-$。

所以　　$\eta(\lambda)\geqslant 0\quad(\lambda>0)$。　　　　(5)

$$\eta(\eta)1=\eta(\lambda_0)(I+(\lambda_0-\lambda)\Phi(\lambda))1$$

$$\leqslant\left(1+\left|\frac{\lambda_0-\lambda}{\lambda}\right|\right)\eta(\lambda_0)1<+\infty。\qquad(6)$$

令 $S=Q+\begin{pmatrix}2q_0 & & 0\\ & 2q_1 & \\ 0 & & \ddots\end{pmatrix}$，以 $(X)_s$ 表示 X 的第 s 个分量，

于是

$$(\eta(\lambda_0)\Phi(\lambda)S)_k$$

$$=\sum_i\left(\eta_i(\lambda_0)\varphi_{ik}(\lambda)q_k+\eta_i(\lambda_0)\sum_{j\neq k}\varphi_{ij}(\lambda)q_{jk}\right)$$

$$\leqslant\frac{q_k}{\lambda}\sum_i\eta_i(\lambda_0)+\sum_i\eta_i(\lambda_0)\sum_{j\neq k}\varphi_{ij}(\lambda)q_{jk}$$

$$=\frac{q_k}{\lambda}\sum_i\eta_i(\lambda_0)+\sum_i\eta_i(\lambda_0)(\lambda\varphi_{ik}(\lambda)+\varphi_{ik}(\lambda)q_k-\delta_{ik})$$

$$\leqslant\frac{q_k}{\lambda}\sum_i\eta_i(\lambda_0)+\sum_i\eta_i(\lambda_0)\left(1+\frac{q_k}{\lambda}+1\right)$$

$$=2\left(1+\frac{q_k}{\lambda}\right)\sum_i\eta_i(\lambda_0)<+\infty。$$

所以对于$\eta(\lambda_0)(I+(\lambda_0-\lambda)\Phi(\lambda))(\lambda I-Q)$ 可使用结合律。故

$$\begin{aligned}\eta(\lambda)(\lambda I-Q)&=(\eta(\lambda_0)(I+(\lambda_0-\lambda)\Phi(\lambda))(\lambda I-Q)\\&=\eta(\lambda_0)((I+(\lambda_0-\lambda)\Phi(\lambda))(\lambda I-Q)\\&=\eta(\lambda_0)((\lambda I-Q)+(\lambda_0-\lambda)\Phi(\lambda)(\lambda I-Q))\\&=\eta(\lambda_0)((\lambda I-Q)+(\lambda_0-\lambda)I)\\&=\eta(\lambda_0)(\lambda I-Q)=0_-。\qquad(7)\end{aligned}$$

由 (5)、(6)、(7) 知，$\eta(\lambda)$ 满足方程 (1)。又

$$
\begin{aligned}
&A(\lambda,\ \mu)A(\mu,\ \nu)\\
&=(I+(\lambda-\mu)\Phi(\mu))(I+(\mu-\nu)\Phi(\nu))\\
&=I+(\lambda-\mu)\Phi(\mu)+(\mu-\nu)\Phi(\nu)\\
&\quad+(\lambda-\mu)(\mu-\nu)\Phi(\mu(\Phi(\nu)\\
&=I+(\lambda-\mu)\Phi(\mu)+(\mu-\nu)\Phi(\nu)\\
&\quad+(\lambda-\mu)(\mu-\nu)\frac{\Phi(\nu)-\Phi(\mu)}{\mu-\nu}\\
&=I+[(\mu-\nu)+(\lambda-\mu)]\Phi(\nu)\\
&=I+(\lambda-\nu)\Phi(\nu)\\
&=A(\lambda,\ \nu).
\end{aligned}
$$

于是
$$
\begin{aligned}
\eta(\lambda)A(\mu,\ \lambda)&=\eta(\lambda_0)A(\lambda_0,\ \mu)A(\mu,\ \lambda)\\
&=\eta(\lambda_0)A(\lambda_0,\ \lambda)\\
&=\eta(\lambda).
\end{aligned}
$$

引理得证。

下面证明的引理2到第八章§5中才用到。

引理2 方程(1)对任一$\lambda>0$只有零解的充要条件是它对某个λ只有零解。

证 必要性显见为真。往证充分性部分。

设方程(1)对某个$\lambda=\lambda_0>0$只有零解。若(1)对另一$\lambda=\lambda'>0$有非零解$\eta(\lambda')$。则由引理1及其证明过程知，可造(1)的一个非零解$\eta(\lambda)$使

$$\eta(\lambda)=\eta(\mu)A(\mu,\ \lambda).$$

特别有

$$\eta(\lambda')=\eta(\lambda_0)A(\lambda_0,\ \lambda').$$

由假设知

$$\eta(\lambda_0)\equiv 0.$$

从而 $\eta(\lambda')\equiv 0.$

但这与对$\lambda=\lambda'$，$\eta(\lambda')$是(1)的非零解矛盾。故对任一$\lambda>0$，

方程（1）只有零解。引理得证。

引理3 若 $R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda))$ 为任一 F 型 Q 过程（的拉氏变换），则对任一 i，$\{r_{ij}(\lambda),\ j\in E\}$ 满足方程

$$\left.\begin{aligned}&x_j=\sum_k \frac{x_k q_{kj}}{\lambda+q_k}+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_j}\quad (j\in E)\\ &0\leqslant x_j,\quad \sum_{j\in E} x_j<+\infty.\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

证 由定理3.5.1立得本引理。

§2 F型Q过程唯一性准则

定理1 对任给的一个Q-矩阵Q，F型Q 过程唯一的充要条件是最小Q过程$\Phi(\lambda)$为诚实的或方程

$$\left.\begin{aligned}&\lambda\eta-\eta Q=0_-\qquad (\lambda>0)\\ &0_-\leqslant\eta,\quad \eta 1<+\infty\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

只有零解。

证 (I)充分性。

设$\Phi(\lambda)$为诚实的Q过程，于是由定理4.2.3立知除 $\Phi(\lambda)$ 外再无其它Q过程；设(1)只有零解，若$R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda);i,j\in E)$为任一$F$型$Q$过程，则由定理4.2.3得

$$w_{ij}(\lambda)=r_{ij}(\lambda)-\varphi_{ij}(\lambda)\geqslant 0.\tag{2}$$

由$R(\lambda)$、$\Phi(\lambda)$都是Q过程及定理3.4.2得

$$\sum_{j\in E} w_{ij}(\lambda)=\sum_{j\in E}(r_{ij}(\lambda)-\varphi_{ij}(\lambda))$$

$$\leqslant\sum_{j\in E} r_{ij}(\lambda)+\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\leqslant\frac{2}{\lambda}<+\infty.\tag{3}$$

又由$R(\lambda)$和$\Phi(\lambda)$都是F型Q过程及引理1.3知，对任一i，$\{r_{ij}(\lambda),\ j\in E\}$和$\{\varphi_{ij}(\lambda),\ j\in E\}$都满足方程（1.8）。于是由（2）和(3)

知，对任一i，$\{w_{ij}(\lambda),\ j\in E\}$满足方程（1）。从而

$$w_{ij}(\lambda)\equiv 0\quad (i,\ j\in E,\ \lambda>0).$$

即 $$r_{ij}(\lambda)\equiv\varphi_{ij}(\lambda)\quad (i,\ j\in E,\ \lambda>0).$$

故除$\Phi(\lambda)$外再无其它F型Q过程。充分性证毕。

(II) 必要性。

若条件不成立，即$\Phi(\lambda)$不是诚实的Q过程，且（1）有非零解，从而

$$\lambda\Phi(\lambda)1\neq 1. \tag{4}$$

由引理1.1知，存在满足（1）的非零解$\eta(\lambda)$，使

$$\eta(\lambda)=\eta(\mu)A(\mu,\lambda)。\eta(\lambda)=\eta(\mu)A(\mu,\lambda) \tag{5}$$

令 $$R(\lambda)=\Phi(\lambda)+\frac{z(\lambda)\eta(\lambda)}{\lambda\eta(\lambda)1}. \tag{6}$$

由$\Phi(\lambda)$为F型Q过程(λ)满足（1）知，$R(\lambda)$满足(3.2.10)：

$$R(\lambda)(\lambda I-Q)=I. \tag{7}$$

于是由引理5.1.2知，$R(\lambda)$是一个异于$\Phi(\lambda)$的F型Q-预解式。故由定理3.5.1知$R(\lambda)$是异于$\Phi(\lambda)$的F型Q过程。所以，这时F型Q过程非唯一，于是条件的必要性得证。定理证毕。

第 7 章

Q过程的唯一性准则

§1 Q过程的唯一性准则的陈述

定理 1（Q过程的唯一性准则） 设任给一个Q-矩阵Q，则存在唯一的Q过程的充要条件是下列二条同时成立：

(i) $$\inf_{i \in E} \lambda \sum_{j \in E} \varphi_{ij}(\lambda) = c(\lambda) > 0, \quad 0 < \lambda < +\infty; \tag{1}$$

(ii) F型Q过程唯一，即最小Q过程$\Phi(\lambda)$是诚实的或方程

$$\left.\begin{array}{l} \lambda\eta - \eta Q = 0_-, \quad \lambda > 0 \\ 0_- \leqslant \eta, \quad \eta 1 < +\infty \end{array}\right\} \tag{2}$$

只有零解。

下面所给出的本定理的证明属于$G.E.Reuter$[14]，它比作者的原证[8]易懂而且简短。

§2 定理1.1的证明：必要性部分

设定理1.1中的条件(i)不成立，于是由定理4.4.7知，存在与λ无关的行矢量$\alpha > 0$使$\alpha\Phi(\lambda)1 < +\infty$ $(0 < \lambda < +\infty)$，但$\alpha 1 = +\infty$，从而

$$\frac{\boldsymbol{d}\alpha}{\lambda\alpha\mathbf{1}}=0, \tag{1}$$

其中$\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$，而$d_i=q_i-\sum_{j\in E}q_{ij}(i\in E)$。由(i)不成立知

$$\boldsymbol{z}(\lambda)\not\equiv 0,$$

即

$$\lambda\Phi(\lambda)\not\equiv 1. \tag{2}$$

令

$$R(\lambda)=\Phi(\lambda)+\frac{\boldsymbol{z}(\lambda)\cdot\alpha\Phi(\lambda)}{\lambda\alpha\Phi(\lambda)\mathbf{1}}. \tag{3}$$

由$\Phi(\lambda)$是一个Q过程及定理3.3.2知

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda\Phi(\lambda)-I)=Q. \tag{4}$$

由定理4.4.2和定理4.4.4得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2\frac{\boldsymbol{z}(\lambda)\cdot\alpha\Phi(\lambda)}{\lambda\alpha\Phi(\lambda)\mathbf{1}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\boldsymbol{z}(\lambda)\cdot\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\alpha\Phi(\lambda)}{\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\alpha\Phi(\lambda)\mathbf{1}}=\frac{\boldsymbol{d}\alpha}{\alpha\mathbf{1}}=0. \tag{5}$$

由(4)和(5)得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda R(\lambda)-I)=Q. \tag{6}$$

由(6)、引理5.1.2以及定理3.3.2立知$R(\lambda)$为一个异于最小Q过程$\Phi(\lambda)$的Q过程，从而Q过程非唯一。

设定理1.1中的条件(ii)不满足，于是由定理6.2.1立知Q过程非唯一。

至此，必要性部分得证。

§3 定理1.1的证明：充分性部分

当最小Q过程为诚实时，根据定理1.2.3知，除$\Phi(\lambda)$外再无

其他Q过程，即这时Q过程唯一。所以下面我们假定定理1.1中条件(i)成立且(1.2)只有零解。

设$R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda))$是任一$Q$过程。对于固定的$i$，我们考虑

$$r_{ij}(\lambda)-\varphi_{ij}(\lambda)=x_j(j\in E) \tag{1}$$

由(4.2.23)、(4.2.8)和(4.2.18)以及

$$\lambda\sum_j x_j\leqslant\lambda\sum_j r_{ij}(\lambda)\leqslant 1 \tag{2}$$

得 $\quad 0\leqslant\boldsymbol{x}\in l,\ \boldsymbol{x}(\lambda I-Q)\geqslant\boldsymbol{0}_{-}$。

从而有 $\quad 0\leqslant\boldsymbol{x}\in l,\ \boldsymbol{x}(\lambda I-Q)=\boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{0}_{-}$。 (3)

由定理4.4.9(6)和条件(ii)，得

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}\Phi(\lambda)。 \tag{4}$$

于是存在矩阵$U(\lambda)$，使

$$R(\lambda)-\Phi(\lambda)=U(\lambda)\Phi(\lambda),\ U(\lambda)\geqslant 0 \tag{5}$$

即 $\quad R(\lambda)=\Phi(\lambda)+U(\lambda)\Phi(\lambda),\ U(\lambda)\geqslant 0$。 (6)

其次，由(6)得

$$\lambda U(\lambda)\Phi(\lambda)\mathbf{1}\leqslant\lambda R(\lambda)\mathbf{1}\leqslant\mathbf{1} \tag{7}$$

再由条件(i)得

$$\mathbf{1}\leqslant c^{-1}(\lambda)\lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1}。 \tag{8}$$

所以 $\quad U(\lambda)\mathbf{1}\leqslant U(\lambda)c^{-1}(\lambda)\lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1}$

$$=c^{-1}(\lambda)\lambda U(\lambda)\Phi(\lambda)\mathbf{1}\leqslant c^{-1}(\lambda)\mathbf{1}。 \tag{9}$$

因此，$U(\lambda)$的每一行是l的元素，$U(\lambda)$的每一列是m的元素。由$\Phi(\lambda)$为Q过程及定理3.3.2得

$$\Phi(\lambda)-\Phi(\mu)+(\lambda-\mu)\Phi(\lambda)\Phi(\mu)=0。 \tag{10}$$

由定理3.3.2知，$R(\lambda)$满足(3.1.2)。现在把(6)代入(3.1.2)中，并利用(10)得

$$\begin{aligned}&U(\lambda)\Phi(\lambda)-U(\mu)\Phi(\mu)+(\lambda-\mu)U(\lambda)\Phi(\lambda)\\&+(\lambda-\mu)\Phi(\lambda)U(\mu)\Phi(\mu)+(\lambda-\mu)U(\lambda)\Phi(\lambda)U(\mu)\Phi(\mu)\\&=0。\end{aligned} \tag{11}$$

由(9)知，上式出现的矩阵的乘积都是有限的．由(10)得

$$(\lambda-\mu)U(\lambda)\Phi(\lambda)\Phi(\mu)=U(\lambda)[\Phi(\mu)-\Phi(\lambda)]. \quad (12)$$

由(7)得

$$U(\lambda)\Phi(\lambda)1<+\infty. \quad (13)$$

由(9)得

$$U(\lambda)\Phi(\mu)1<\frac{1}{\mu}U(\lambda)1<+\infty. \quad (14)$$

由(12)、(13)、(14)和定理10.1.1得

$$(\lambda-\mu)U(\lambda)\Phi(\lambda)\Phi(\mu)=U(\lambda)\Phi(\mu)-U(\lambda)\Phi(\lambda). \quad (15)$$

把(15)代入(11)得

$$U(\lambda)\Phi(\mu)-U(\mu)\Phi(\mu)+(\lambda-\mu)\Phi(\lambda)U(\mu)\Phi(\mu)$$
$$+(\lambda-\mu)U(\lambda)\Phi(\lambda)U(\mu)\Phi(\mu)=0. \quad (16)$$

由(9)知，$U(\lambda)$、$U(\mu)$、$\Phi(\lambda)U(\mu)$及$U(\lambda)\Phi(\lambda)U(\mu)$都是有限的，从而由定理10.1.1得

$$[U(\lambda)-U(\mu)+(\lambda-\mu)\Phi(\lambda)U(\mu)$$
$$+(\lambda-\mu)U(\lambda)\Phi(\lambda)U(\mu)]\Phi(\mu)=0. \quad (17)$$

于是，由定理4.4.9(b)得

$$U(\lambda)-U(\mu)+(\lambda-\mu)\Phi(\lambda)U(\mu)+(\lambda-\mu)\Phi(\lambda)U(\lambda)$$
$$\times U(\mu)=0. \quad (18)$$

即
$$U(\mu)+(\mu-\lambda)\Phi(\lambda)U(\mu)=U(\lambda)$$
$$+(\lambda-\mu)U(\lambda)\Phi(\lambda)U(\mu). \quad (19)$$

当$\lambda\geqslant\mu$时，(19)的右边$\geqslant0$，因此，这时它的左边$\geqslant0$，所以

$$U(\mu)\geqslant(\lambda-\mu)\Phi(\lambda)U(\mu),\quad \lambda\geqslant\mu. \quad (20)$$

从而
$$\lambda U(\mu)\geqslant(\lambda-\mu)U(\mu)+(\lambda-\mu)(\lambda\Phi(\lambda)-1)U(\mu),$$
$$\mu U(\mu)\geqslant(\lambda-\mu)(\lambda\Phi(\lambda)-I)U(\mu),$$
$$\mu U(\mu)\geqslant\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)\lambda(\lambda\Phi(\lambda)-I)U(\mu). \quad (21)$$

固定i，并把$U(\mu)$的第i列记为$\boldsymbol{y}$，于是由(21)得

$$\mu y_i - \left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)\sum_{k\in E}\lambda(\lambda\varphi_{ik}(\lambda)-\delta_{ik})y_k$$

$$=\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)\left\{\lambda(\lambda\varphi_{ii}(\lambda)-1)\,y_i+\sum_{k\neq i}\lambda^2\varphi_{ik}(\lambda)y_k\right\}. \tag{22}$$

由定理3.3.2和$\Phi(\lambda)$为Q过程知

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda\varphi_{ik}(\lambda)-\delta_{ik})=q_{ik}. \tag{23}$$

由(22)、(23)以及定理10.2.5得

$$\mu y_i\geqslant -q_i\,y_i+\sum_{k\neq i}q_{ik}y_k, \tag{24}$$

即
$$(\mu I-Q)\boldsymbol{y}\geqslant\mathbf{0}_1. \tag{25}$$

从而
$$(\mu I-Q)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{v}\geqslant\mathbf{0}_1. \tag{26}$$

作为$U(\mu)$的一个列的$\boldsymbol{y}$，由(9)知它是m中一元，于是由条件(i)、定理4.4.8以及定理4.2.4知$\boldsymbol{y}=\Phi(\mu)\boldsymbol{v}$，从而，存在矩阵$V(\mu)\geqslant0$使

$$U(\mu)=\Phi(\mu)V(\mu). \tag{27}$$

于是(6)变成

$$R(\lambda)=\Phi(\lambda)+\Phi(\lambda)V(\lambda)\Phi(\lambda),\ \ V(\lambda)\geqslant0. \tag{28}$$

用$U=\Phi V$代入(18)并利用(10)得

$$\Phi(\lambda)[V(\lambda)-V(\mu)+(\lambda-\mu)V(\lambda)\Phi(\lambda)\Phi(\mu)V(\mu)]$$
$$=0. \tag{29}$$

由定理4.4.9(a)并利用$\Phi(\mu)-\Phi(\lambda)$代替$(\lambda-\mu)\Phi(\lambda)\Phi(\mu)$得

$$V(\lambda)-V(\mu)+V(\lambda)(\Phi(\mu)-\Phi(\lambda))V(\mu)=0. \tag{30}$$

由(28)知

$$\lambda\Phi(\lambda)V(\lambda)\Phi(\lambda)1\leqslant1. \tag{31}$$

根据条件(i)

$$c(\lambda)1\leqslant\lambda\Phi(\lambda)1. \tag{32}$$

由(31)和(32)得

$$c(\lambda)\Phi(\lambda)V(\lambda)1=\Phi(\lambda)V(\lambda)c(\lambda)1$$

$$\leqslant\Phi(\lambda)V(\lambda)\lambda\Phi(\lambda)1-\lambda\Phi(\lambda)V(\lambda)\Phi(\lambda)1<1. \quad (33)$$

因此 $c(\lambda)\varphi_{ii}(\lambda)[V(\lambda)1]_i\leqslant1$。 (34)

这里$[V(\lambda)1]_i$表示$[V(\lambda)1]$的第i个分量，所以

$$V(\lambda)1<+\infty. \quad (35)$$

由(9) $\Phi(\mu)V(\mu)1=U(\mu)1<c^{-1}(\mu)1.$ (36)

所以 $V(\lambda)\Phi(\mu)V(\mu)1\leqslant c^{-1}(\mu)V(\lambda)1<+\infty$。 (37)

因$\Phi(\lambda)$为λ的非增函数及(30)知$V(\lambda)$是λ的非增函数，于是由(37)得

$$V(\lambda)\Phi(\lambda)V(\mu)1\leqslant V(\lambda)\Phi(\lambda)V(\lambda)1<+\infty,\lambda\leqslant\mu \quad (38)$$

及 $V(\lambda)\Phi(\lambda)V(\mu)1\leqslant V(\mu)\Phi(\mu)V(\mu)1<+\infty,\ \lambda\leqslant\mu$。

(39)

由(37)、(38)和(39)知(30)可改写成

$$V(\lambda)+V(\lambda)\Phi(\mu)V(\mu)=V(\mu)+V(\lambda)\Phi(\lambda)V(\mu).$$

(40)

由定理3.3.2和$R(\lambda)$为Q过程知

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda R(\lambda)-I)=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda\Phi-I)=Q. \quad (41)$$

所以 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda^2\Phi(\lambda)V(\lambda)\Phi(\lambda)=0$。 (42)

于是，若以A_{ij}表示矩阵A的第i行第j列处的元素，则得

$$(\lambda^2\Phi(\lambda)V(\lambda)\Phi(\lambda))_{ij}\geqslant\lambda^2\varphi_{ii}(\lambda)U_{ij}(\lambda)\varphi_{jj}(\lambda). \quad (43)$$

由$\Phi(\lambda)$为Q过程知

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\varphi_{ii}(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\varphi_{jj}(\lambda)=1. \quad (44)$$

由(42)、(43)及$V(\lambda)$为λ的非增函数知

$$v_{ij}(\lambda)\downarrow0(\lambda\uparrow+\infty). \quad (45)$$

注意(45)和$\Phi(\lambda)\downarrow0(\lambda\uparrow+\infty)$，并在$\lambda\uparrow+\infty$之下对(40)的两端取极限，立得

$$0+0=V(\mu)+0.$$

所以　　$V(\mu)=0$。

于是　　$R(\mu)=\Phi(\mu)$。　　(46)

即Q过程唯一，这个唯一的Q过程就是最小Q过程。

至此，定理1.1中条件的充分性得证。

§4　Q过程的唯一性的另一准则

引理1　设

$$a_{ik}\geqslant 0,\ (i,k\in E),\ \sum_{k\in E}a_{ik}\leqslant 1,\ b_i\geqslant 0\quad (i\in E)\tag{1}$$

及$x_i^*(i\in E)$是非负线性方程组

$$x_i=\sum_{k\in E}a_{ik}x_k+b_i\quad (i\in E)\tag{2}$$

的最小非负解，令$D=(i;\ i\in E,\ b_i>0)$，则

$$x_i^*\leqslant\sup_{j\in D}x_j^*\quad (i\in E).\tag{3}$$

即

$$\sup_{i\in E}x_i^*=\sup_{i\in D}x_i^*\quad (i\in E).\tag{4}$$

证　令

$$\left.\begin{aligned}&x_i^{(0)}=b_i\quad (i\in E),\\&x_i^{(n+1)}=\sum_{k\in E}a_{ik}x_k^{(n)}+b_i(n\geqslant 0,i\in E).\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

于是有　$x_i^{(1)}=\begin{cases}b_i>0,\ (i\in D);\\0\quad,\ (i\in E\setminus D).\end{cases}$

所以　　$x_i^{(1)}\leqslant\sup\limits_{j\in D}x_j^{(1)}$。

假定有　$x_i^{(n)}\leqslant\sup\limits_{j\in E}x_j^{(n)}$，

则当注意$x_i^{(n)}\uparrow\ (n\uparrow+\infty)$及(1)时，得

$$x_i^{(n+1)}=\sum_{k\in E}a_{ik}x_k^{(n)}+b_i$$

$$= \sum_{k \in E} a_{ik} x_k^{(n)}$$

$$\leqslant \sum_{k \in E} a_{ik} \sup_{j \in D} x_j^{(n)}$$

$$= \sup_{j \in D} x_j^{(n)} \sum_{k \in E} a_{ik}$$

$$\leqslant \sup_{j \in D} x_j^{(n)} \leqslant \sup_{j \in D} x_j^{(n+1)} \quad (i \in E \setminus D).$$

于是有 $x_i^{(n+1)} \leqslant \sup\limits_{j \in D} x_j^{(n+1)} \quad (i \in E)$。

故由归纳法知，对一切自然数n，有

$$x_i^{(n)} \leqslant \sup_{j \in D} x_j^{(n)} \leqslant \sup_{j \in D} x_j^{*}.$$

于是由$x_i^{(n)} \uparrow x_i^{*} (n \uparrow +\infty)$，立得(3)。引理得证。

引理2 若方程

$$\left.\begin{array}{l} \lambda \boldsymbol{U} - Q\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}_1, \quad (\lambda > 0) \\ \boldsymbol{0}_1 \leqslant \boldsymbol{U} \leqslant 1 \end{array}\right\} \tag{5}$$

只有零解，则

$$\inf_{i \in E} \lambda \sum_{j \in E} \varphi_{ij}(\lambda) = \inf_{i \in \dot{E}} \lambda \sum_{j \in \dot{E}} \varphi_{ij}(\lambda), \tag{6}$$

其中 $\dot{E} = \left(i: \sum\limits_{j \in E} q_{ij} < 0\right)$叫做非负保守状态集，它的每个元素叫做非保守状态。

证 在定理4.4.1的证明中曾指出，$1 - \lambda \sum\limits_{j \in E} \Phi_{ij}(\lambda) \ (i \in E)$是非负线性方程组

$$x_i = \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} x_k + \frac{-\sum\limits_{j \in E} q_{ij}}{\lambda + q_i} \quad (i \in E) \tag{7}$$

的有界解。注意方程(1)即

$$u_i = \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik} x_k}{\lambda + q_i} \quad (i \in E). \tag{8}$$

所以这时方程(8)只有零解。从而(7)的有界解唯一，故我们可以说$1-\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)(i\in E)$是方程(7)的最小非负解。于是由引理1得

$$\sup_{i\in E}\left(1-\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\right)=\sup_{i\in E}\left(1-\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\right).$$

从而(6)成立。引理得证。

定理1 (Q过程的唯一性的另一准则)设任给一个Q-矩阵，则存在唯一的Q过程的充要条件是下列三条件同时成立：

(i) B型Q过程唯一；

(ii) F型Q过程唯一；

(iii) $\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)>0$，$(0<\lambda<+\infty)$。 (9)

证 必要性。

设Q过程唯一，则由定理1.1知(ii)和(iii)成立。由(9)及定理4.4.8知方程(5)只有零解，于是由定理5.4.1知(i)也成立。必要性得证。

充分性

设(i)、(ii)及(iii)成立。由引理2,(i)和(iii)知定理1.1中条件(i)成立。由(ii)知定理1.1中条件(ii)成立,于是由定理1.1知Q过程唯一。充分性得证。定理证毕。

定理1给出的Q过程唯一性准则比定理1.1给出的在形式上更为完美。因为条件(i)、(ii)和(iii)各自的意义和作用都很明确。条件(i)和(ii)是分别加在B型和F型Q过程上的限制。在Q为保守的情况下，这两个条件就恰好保证Q过程的唯一性,但在有非保守状态出现时，这两个条件就未必能保证Q过程唯一

了。因此，自然会使我们产生一个十分朴直的想法：在一般情况下，除条件(i)和(ii)外，在非保守状态上补充什么限制就能使Q过程唯一呢？定理 1 给出了回答：这种想法是成功的，这个补充限制就是条件(iii)。这样一来，加在B型和F型Q过程上的限制(i)和(ii)就处在对称的地位了。

第 8 章

Q过程的唯一性准则的应用举例

§1 有界情况

定义1 若存在常数$0\leqslant c<+\infty$，使$-q_{ii}\leqslant c\quad(i\in E)$成立，则称$Q$为有界的。

引理1 若$\eta_i(i\in E)$是方程

$$\left.\begin{aligned}&\lambda\eta_j-\sum_{i\in E}\eta_i q_{ij}=0,\lambda>0\\&0\leqslant\eta_j,\sum_{i\in E}\eta_i<+\infty\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

的任一非零解，则

$$\sum_{j\in E}\Big(\sum_{k\neq j}q_{jk}\Big)\eta_j=+\infty。\tag{2}$$

证 由(1)得

$$(\lambda+q_j)\eta_j=\sum_{k\neq j}q_{kj}\eta_k。$$

于是有 $\lambda\sum_{j\in E}\eta_j+\sum_{j\in E}q_j\eta_j=\sum_{j\in E}\Big(\sum_{k\neq j}q_{kj}\eta_k\Big)$

$$=\sum_{k\in E}\Big(\sum_{j\neq k}q_{kj}\Big)\eta_k=\sum_{j\in E}\Big(\sum_{k\neq j}q_{jk}\Big)\eta_j。$$

若 $\sum_{j\in E}\left(\sum_{k\neq j}q_{jk}\eta_j\right)<+\infty$，于是由$\lambda>0$，$q_j\geqslant\sum_{k\neq j}q_{jk}(j\in E)$及$\sum_{j\in E}\eta_j<+\infty$，得$\sum_{j\in E}\eta_j=0$。于是由$\eta_j\geqslant0(j\in E)$得$\eta_j=0\ (j\in E)$。但这与$\eta_j\ (j\in E)$是（1）的非零解矛盾。故（2）必成立。引理证毕。

引理2 若

$$\sum_{j\neq i}q_{ij}\leqslant c<+\infty\quad(i\in E), \tag{3}$$

则（1）只有零解。

证 设$\eta_j(j\in E)$是（1）的任一解，则

$$\sum_{j\in E}\left(\sum_{k\neq j}q_{jk}\right)\eta_j\leqslant c\sum_{j\in E}\eta_j<+\infty. \tag{4}$$

于是由引理1知$\eta_j=0\quad(j\in E)$。引理证毕。

定理1 若Q是有界的，则Q过程唯一。从而B型和F型Q过程唯一。

证 在定理4.4.1的证明中曾指出，$\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)(i\in E)$是非负线性方程组

$$x_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}x_k}{\lambda+q_i}+\frac{\lambda}{\lambda+q_i}\quad(i\in E) \tag{5}$$

的最小非负解。于是

$$\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\geqslant\frac{\lambda}{\lambda+q_i}\geqslant\frac{\lambda}{\lambda+c}>0\quad(i\in E). \tag{6}$$

从而定理7.1.1中的条件（i）满足。又

$$\sum_{j\neq i}q_{ij}\leqslant q_i<c<+\infty. \tag{7}$$

于是由引理2知，（1）只有零解。故定理7.1.1中的条件（ii）

亦满足，从而由定理7.1.1知．Q过程唯一。定理证毕。

§2 E为有界集的情况

定理1 若E为有限集，则Q过程唯一．从而B型和F型Q过程唯一。

证 显见，定理7.1.1对E为有限集也成立。由$q_i \leqslant \max q_i < +\infty$及定理1.1立知$Q$过程唯一。定理证毕。

§3 对角型情况

定义1 若Q有如下性质，则称它为对角型的：

$$q_{ij}=0(i \neq j),\ q_i \neq 0(i \in E). \tag{1}$$

定理1 若Q是对角型的，则B型Q过程唯一。

证 这时方程（5.4.1）变成

$$\lambda u_i = -q_i u_i,\ 0 \leqslant u_i \leqslant 1,\ (i \in E). \tag{2}$$

即

$$(\lambda + q_i) u_i = 0,\ 0 \leqslant u_i \leqslant 1,\ (i \in E). \tag{3}$$

于是由$\lambda + q_i > 0$立得

$$u_i = 0 \quad (i \in E). \tag{4}$$

故方程（5.4.1）只有零解。于是由定理5.4.1知B型Q过程唯一。

定理2 若Q是对角型的，则F型Q过程唯一。

证 仿定理1之证明易完成本定理之证明。

定理3 若Q是对角型的，则Q过程唯一的充要条件是

$$\sup_{i \in E} q_i = c < +\infty. \tag{5}$$

证 **充分性.**

设（5）成立，这时方程（1.5）变成：

$$x_i=\frac{\lambda}{\lambda+q_i}(i\in E). \tag{6}$$

于是，由于$\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)$（$i\in E$）是方程(1.5)即（6）的最小非负解立得

$$\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)=\frac{\lambda}{\lambda+q_i}\geqslant\frac{\lambda}{\lambda+c}>0\ (i\in E). \tag{7}$$

从而定理7.1.1中条件（i）成立。由定理1知定理7.1.1中条件（ii）亦满足，故Q过程唯一。

必要性。

若（5）不成立，则

$$\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)=\inf_{i\in E}\frac{\lambda}{\lambda+q_i}=0.$$

所以定理7.1.1中的条件（i）不满足，故Q过程不唯一。定理证毕。

§4 加边对角型情况

形如

$$\begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & q_{02} & q_{03} & \cdots \\ q_{10} & -q_1 & 0 & 0 & \\ q_{20} & 0 & -q_2 & 0 & 0 \\ q_{30} & 0 & 0 & -q_3 & \\ \vdots & & 0 & & \ddots \end{pmatrix} \tag{1}$$

的Q-矩阵叫做加边对角型Q-矩阵。

定理1 若Q-矩阵为加边对角型的，则B型Q过程唯一。

证 这时方程$\lambda\boldsymbol{U}-Q\boldsymbol{U}=0$成为

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+q_0)u_0&=\sum_{k\neq0}q_{0k}u_k,\\(\lambda+q_i)u_i&=q_{i0}u_0\quad(i=1,2,\cdots).\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

于是 $$(\lambda+q_0)u_0=\Big(\sum_{k\neq0}\frac{q_{0k}q_{k0}}{\lambda+q_k}\Big)u_0.\tag{3}$$

于是对于某$\lambda=\lambda_0>0$，$u_0\neq0$，则由$q_{k0}<q_k$得

$$q_0<\lambda+q_0=\sum_{k\neq0}\frac{q_{0k}q_{k0}}{\lambda_0+q_k}<\sum_{k\neq0}q_{0k}\leqslant q_0.\tag{4}$$

导致矛盾$q_0<q_0$。于是必有$u_0\equiv0$。故由定理5.4.1知B型Q过程唯一。

定理2 若Q-矩阵为加边对角型的，则F型Q过程唯一。

证 参看定理1的证明不难得知，方程$\lambda\eta-\eta Q=0$只有零解。于是根据定理6.2.1知F型Q过程唯一。

定理3 Q过程唯一的充要条件是

$$\inf_{i\in\hat{E}}\frac{1+q_{i0}}{1+q_i}>0,\tag{5}$$

其中$\hat{E}=(i>0:\ q_i\neq q_{i0})$。

证 先证充分性。

设(5)成立.已知$\left\{\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda),\ i\in E\right\}$是非负线性方程组

$$\left.\begin{aligned}x_0&=\sum_{k\neq0}\frac{q_0k}{\lambda+q_0}x_k+\frac{\lambda}{\lambda+q_0}\\x_i&=\frac{q_{i0}}{\lambda+q_i}x_0+\frac{\lambda}{\lambda+q_i}(i\neq0)\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

的最小非负解，于是

$$\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{0j}(\lambda)\geqslant\frac{\lambda}{\lambda+q_0}.\tag{7}$$

从而 $$\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\geqslant\frac{q_{i0}}{\lambda+q_i}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+q_0}+\frac{\lambda}{\lambda+q_i}=\frac{\lambda(\lambda+q_0+q_i)}{(\lambda+q_i)(\lambda+q_0)}$$

$$\geqslant \frac{\lambda}{\lambda+q_0}\cdot\frac{\lambda+q_{i0}}{\lambda+q_i},\quad (i\neq 0). \tag{8}$$

故由 $\quad 0\leqslant\frac{\lambda+q_{i0}}{\lambda+q_i}\leqslant 1$

得 $$\inf_{i\in E} 1\cdot\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(1)\geqslant\frac{1}{1+q_0}\inf_{i\neq 0}\frac{1+q_{i0}}{1+q_i}$$

$$=\frac{1}{1+q_0}\inf_{\hat{E}}\frac{1+q_{i0}}{1+q_i}>0. \tag{9}$$

故由定理1、定理2、定理4.4.6以及定理7.1.1立得Q过程唯一.

下面证明必要性。

设（5）不成立。即

$$\inf_{i\in\hat{E}}\frac{1+q_{i0}}{1+q_i}=0. \tag{10}$$

注意$\lambda\sum\limits_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\leqslant 1$得

$$\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)=\frac{q_{i0}}{\lambda+q_i}\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{0j}(\lambda)+\frac{\lambda}{\lambda+q_i}$$

$$\leqslant\frac{q_{i0}}{\lambda+q_i}+\frac{\lambda}{\lambda+q_i}=\frac{\lambda+q_{i0}}{\lambda+q_i}(i\neq 0). \tag{11}$$

于是 $$\inf_{i\in E}1\cdot\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(1)\leqslant\inf_{i\in\hat{E}}1\cdot\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(1)$$

$$\leqslant\inf_{i\in\hat{E}}\frac{1+q_{i0}}{1+q_i}=0. \tag{12}$$

故由定理7.1.1知，Q过程不唯一。定理证毕。

例1 设$q_i=2i$，$q_{i0}=i$ $(i>0)$。这时

$$\inf_{\hat{E}}\frac{1+q_{i0}}{1+q_i}=\inf_{i\in\hat{E}}\frac{1+i}{1+2i}=\lim_{i\to\infty}\frac{\frac{1}{i}+1}{\frac{1}{i}+2}=\frac{1}{2}>0, \tag{11}$$

所以这时Q过程唯一。

例2 设$q_i=i^2$，$q_{i0}=i(i>0)$。这时

$$\inf_{i\in\hat{E}}\frac{1+q_{i0}}{1+q_i}=\inf_{i\in\hat{E}}\frac{1+i}{1+i^2}=\lim_{i\to\infty}\frac{\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i}}{\frac{1}{i^2}+1}=0。\qquad(15)$$

所以这时Q过程不唯一。

下面我们更简单地重新推导出§3中的结果：

系1 若Q为对角形的，则B型Q过程和F型Q过程唯一。Q过程唯一的充要条件是

$$\sup_{i\in E}q_i<+\infty。\qquad(16)$$

证 由定理1和定理2立得系的前半部分。由定理3知，Q过程唯一的充要条件是

$$\inf_{i\in E}\frac{1+q_{i0}}{1+q_i}=\inf_{i\in(q_i>0)}\frac{1}{1+q_i}>0。\qquad(17)$$

即 $$\sup_{i\in E}q_i<+\infty。$$

于是我们的系得证。

§5 有限非保守情况

定义1 若$\dot{E}=\left(i:\sum_{j\in E}q_{ij}<0\right)$为有限集，则称$Q$为有限非保守的。

定理1 若Q是有限非保守的，则Q过程唯一的充要条件为B型和F型Q过程都唯一。

证 若$\dot{E}$为有限集，则

$$\inf_{i\in \dot{E}} \lambda \sum_{j\in E} p_{ij}(\lambda) \geqslant \inf_{i\in \dot{E}} \lambda p_{ii}(\lambda) - \min_{i\in \dot{E}} \lambda p_{ii}(\lambda) > 0.$$

于是由定理7.4.1立得我们的定理。

§6 生灭情况

设$a_0 \geqslant 0$，$a_i > 0$，$b_i > 0 (i=1, 2, \cdots)$。形如

$$Q=\begin{pmatrix} -(a_0+b_0) & b_0 & & & & 0 \\ a_1 & -(a_1+b_1) & b_1 & & & \\ & 0 & a_2 & -(a_2+b_2) & b_2 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (1)$$

的Q-矩阵称为生灭Q-矩阵。对应的Q过程称为生灭Q过程。

令

$$\left.\begin{aligned} z_0 &= \begin{cases} 0, & \text{如} a_0 = 0 \\ \dfrac{1}{a_0}, & \text{如} a_0 \neq 0 \end{cases} \\ z_1 &= z_0 + \frac{1}{b_0} \\ &\cdots\cdots \\ z_n &= z_0 + \frac{1}{b_0} + \cdots + \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{b_0 b_1 \cdots b_{n-1}} \quad (n=2,3,\cdots) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n \quad (3)$$

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_n = \frac{b_0 b_1 \cdots b_{n-1}}{a_1 a_2 \cdots a_{n-} a_{-1}} \quad (n>1) \quad (4)$$

$$R = \sum_{i=0}^{\infty} (z - z_i)\mu_i \quad (5)$$

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} z_i \mu_i \quad (6)$$

显见 $$R=\sum_{i=0}^{\infty}(z_{i+1}-z_i)\sum_{k=0}^{i}\mu_k。\tag{7}$$

设 $u=\begin{pmatrix}u_0\\u_1\\\vdots\end{pmatrix}$为一列矢量。定义$u^+$如下：

$$u_i^+=\frac{u_{i+1}-u_i}{z_{i+1}-z_i}\ (i\geqslant 0)。\tag{8}$$

为了方便，以后约定

$$u_{-1}^+=a_0u_0,\quad u_{-1}=0。\tag{9}$$

于是可定义$D_\mu u$如下：

$$D_\mu u_i=\frac{u_i-u_{i-1}}{\mu_i}\quad (i\geqslant 0)。\tag{10}$$

引理1 设u为列矢量，则

$$Qu=D_\mu u^+。\tag{11}$$

即 $$a_iu_{i-1}-(a_i+b_i)u_i+b_iu_{i+1}=(D_\mu u^+)_i,\quad i\geqslant 0。\tag{12}$$

证

$$(D_\mu u^+)_0=\frac{u_0^+-u_{-1}^+}{\mu_0}=\frac{u_1-u_0}{z_1-z_0}-a_0u_0$$

$$=b_0(u_1-u_0)-a_0u_0$$
$$=-(a_0+b_0)u_0+b_0u_1。\tag{13}$$

易验证 $$a_i=\frac{1}{(z_i-z_{i-1})\mu_i}\quad (i>0)。\tag{14}$$

$$b_i=\frac{1}{(z_{i+1}-z_i)\mu_i}(i\geqslant 0)。\tag{15}$$

故 $$(D_\mu u^+)_i=\frac{\dfrac{u_{i+1}-u_i}{z_{i+1}-z_i}-\dfrac{u_i-u_{i-1}}{z_i-z_{i-1}}}{\mu_i}$$

$$=b_i(u_{i+1}-u_i)-a_i(u_i-u_{i-1})$$

$$=a_iu_{i-1}-(a_i+b_i)u_i+b_iu_{i+1},\quad (i>0). \tag{17}$$

引理证毕。

引理2 方程

$$\lambda\boldsymbol{U}-Q\boldsymbol{U}=\boldsymbol{0}_1,\ u_0=1,\ \lambda>0 \tag{18}$$

的解$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}u_0\\u_1\\\vdots\end{pmatrix}$存在唯一；方程

$$\lambda\eta-\eta Q=\boldsymbol{0}_-,\ \eta_0=1,\ \lambda>0 \tag{19}$$

的解$\eta=(\eta_0,\ \eta_1,\ \cdots)$存在唯一，且

$$\eta_i=u_i\mu_i. \tag{20}$$

证 由方程(18)得递推公式：

$$\begin{cases}\mu_0=1,\\ \mu_{i+1}=\dfrac{(\lambda+a_i+b_i)u_i-a_iu_{i-1}}{b_i}\ (i\geqslant1)\end{cases} \tag{21}$$

故（18）的解$u(\lambda)$存在唯一。显然有

$$\frac{u_{i+1}}{u_i}=\frac{b_i}{a_{i+1}} \tag{22}$$

即

$$\mu_ib_i=\mu_{i+1}a_{i+1}. \tag{23}$$

于是，用直接验证可知$\eta(\lambda)$是(19)的解。(19)的解的唯一性显然。于是引理得证。

引理3

$$u_i^+=u_0^++\lambda\sum_{k=1}^{i}u_k\mu_k=u_0^++\lambda\sum_{k=1}^{i}\eta_k,\ i>0. \tag{24}$$

$$u_i=u_0+\sum_{k=0}^{i-1}u_k^+(z_{k+1}-z_k),\ i>0. \tag{25}$$

$$u_i = u_0 + u_0^+(z_i - z_0) + \lambda \sum_{k=1}^{i-1} u_k(z_i - z_k)\mu_k, i>0. \quad (26)$$

证 由引理1知

$$u_i^+ - u_{i-1}^+ = \lambda u_i \mu_i \quad (27)$$

故由(20)知

$$\begin{aligned} u_i^+ &= u_0^+ + \sum_{k=1}^{i}(u_k^+ - u_{k-1}^+) \\ &= u_0^+ + \lambda \sum_{k=1}^{i} u_k \mu_k \\ &= u_0^+ + \lambda \sum_{k=1}^{i} \eta_k \mu_k, \quad i>0. \end{aligned} \quad (28)$$

又$u_i = u_0 + \sum_{i=0}^{i-1} n_{k+1} - u_k = u_0 + \sum_{k=0}^{i-1} u_k^+(z_{k+1} - z_k)$，$i>0$。(29)

把(28) 代入(29) 并整理之得

$$u_i = u_0 + u_0^+(z_i - z_0) + \lambda \sum_{k=1}^{i-1} u_k(z_i - z_k)\mu_k, i>0. \quad (30)$$

于是引理得证。

引理4 u_i和$u_i^+(i \geq 0)$严格正。当$i \uparrow +\infty$时u_i和u_i^+严格增加。$u_\infty = \lim_{i \to \infty} u_i < +\infty$的充要条件是$R<\infty$；$u_\infty^+ = \lim_{i \to \infty} u_i^+ < +\infty$的充要条件是$S<+\infty$。

证 由u^+的定义和方程(18) 得

$$u_0^+ = \frac{u_1 - u_0}{z_1 - z_0} = b_0(u_1 - u_0) = \lambda + a_0 > 0. \quad (31)$$

于是由(26)知u_i严格正且当$i \uparrow +\infty$时u_i严格增加。于是由 (24) u_i^+也严格正，且当$i \uparrow +\infty$时u_i^+严格增加。所 以 $u_\infty = \lim_{i \to \infty} u_i$ 和 $u_\infty^+ = \lim_{k \to \infty} u_i^+$存在。设$u_\infty < \infty$，由$u_i$严格增和(26) 得

$$u_i > \lambda u_0 \sum_{k=1}^{i-1}(z_i - z_k)\mu_k. \tag{32}$$

于是$R<+\infty$。反之，设$R<+\infty$。由u_i严格增和（24）得

$$u_{i+1} - u_i < u_0^+(z_{i+1} - z_i) + \lambda u_i(z_{i+1} - z_i)\sum_{k=1}^{i}\mu_k. \tag{33}$$

$$\frac{u_{i+1}}{u_i} - 1 < \frac{u_0^+}{u_0}(z_{i+1} - z_i) + \lambda(z_{i+1} - z_i)\sum_{k=1}^{i}\mu_k. \tag{34}$$

上式右边是收敛级数的项，故$\sum_{i>0}\log\frac{u_{i+1}}{u_i}$收敛，从而$u_\infty<\infty$。

设$u_\infty^+<\infty$。由(24)知

$$u_i^+ > \lambda\sum_{k=1}^{i}\mu_k,\ i>0. \tag{35}$$

故

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k < \infty. \tag{36}$$

由（26）有

$$u_i > u_i^+ z_i - u_0^+ z_0. \tag{37}$$

故由（24）得

$$u_i^+ > u_0^+\lambda\sum_{k=1}^{i} z_k\mu_k - u_0^+ z_0\lambda\sum_{k=1}^{i}\mu_k. \tag{38}$$

$$u_i^+ + u_0^+ z_0\lambda\sum_{k=1}^{i}\mu_k > u_0^+\lambda\sum_{k=1}^{i} z_k\mu_k. \tag{39}$$

故$S<+\infty$。反之，如$S<+\infty$，由u_i^+的严格增和（25）得

$$u_i < u_0 + u_{i-1}^+(z_i - z_0) \leqslant u_0 + u_{i-1}^+ z_i. \tag{40}$$

故

$$u_i^+ - u_{i-1}^+ = \lambda u_i\mu_i < \lambda u_0\mu_i + \lambda u_{i-1}^+ z_i\mu_i. \tag{41}$$

$$\frac{u_i^+}{u_{i-1}^+} - 1 < \frac{\lambda u_0}{u_0^+}\mu_i + \lambda z_i\mu_i. \tag{42}$$

注意$\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} z_k\mu_k < \infty$知$\sum_{i>0}\log\frac{u_i^+}{u_{i-1}}$收敛。从而$u_\infty^+<\infty$。引理证毕。

定理1 B型Q过程唯一的充要条件是$R=\infty$。

证 由引理4知，方程

$$\left.\begin{array}{l}\lambda \boldsymbol{U}-Q\boldsymbol{U}=\boldsymbol{0}_1,\ \lambda>0\\ \boldsymbol{0}_1\leqslant \boldsymbol{U}\leqslant 1\end{array}\right\}\tag{43}$$

只有零解的充要条件是$R=\infty$。于是由定理5.4.1立得我们的定理。

定理2 F型Q过程唯一的充要条件是$a_i=0$，$R=+\infty$或$S=+\infty$。

证 由（24）知

$$u_\infty^+=u_n^++\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k。\tag{44}$$

所以方程

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}Q=\boldsymbol{0}_-,\ \lambda>0\\ \boldsymbol{0}_-\leqslant\boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\eta}1<+\infty\end{array}\right\}\tag{45}$$

只有零解的充要条件是$u_\infty^+<+\infty$。于是由定理5.4.1、定理5.4.2.定理6.2.1.定理1以及当且仅当$a_0=0$时Q保守立得我们的定理。

定理3 Q过程唯一的充要条件是$a_0=0$，$R=\infty$或$R=\infty$，$S=\infty$。

证 由定理1、定理2以及定理8.5.1立得我们的定理，

例1 设$a_i=b_i=1$（$i=0，1，\cdots$）。

这时$z_n=1$，$z=+\infty$，$\mu_n=1$。从而$R=S=+\infty$。故Q过唯程一。

例2 设$a_n=b_n=(n+1)2^n$（$n=0，1，\cdots$）。

这时 $z_n=n+1$， (46)

$$\mu_n = \frac{1}{(n+1)2^n}, \tag{47}$$

$$z = +\infty. \tag{48}$$

于是 $R=\infty$, $S=\sum_{n=1}^{\infty} z_n\mu_n = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\frac{1}{(n+1)2^n}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1. \tag{49}$$

所以B型Q过程唯一．于是由$a_0=1>0$及$S=1<+\infty$知F型Q过程非唯一，从而Q过程非唯一。

例3 设$a_n=\frac{1}{2}b_n=2^n$ ($n=0, 1, \cdots$)。

这时

$$z_n = 2(1-2^{-(n+1)}). \tag{50}$$

$$z=2,\ z-z_i=2^{-i}. \tag{51}$$

$$\mu_n = 1. \tag{52}$$

$$R=2<+\infty,\ S=+\infty. \tag{53}$$

所以B型Q过程非唯一，F型Q过程唯一，从而Q过程非唯一。

例4 $a_n=\frac{1}{2}b_n=2^{2n}$ ($n=0, 1, 2, \cdots$)。

这时

$$z_n = 2(1-2^{-(n+1)}), \tag{54}$$

$$z=2,\ z-z_i=2^{-i}, \tag{55}$$

$$\mu_n = 2^{-n}, \tag{56}$$

$$R=\frac{4}{3}<+\infty,\ S=\frac{5}{3}<+\infty. \tag{57}$$

所以B型和F型Q过程都非唯一，从而Q过程非唯一。

例5 设$a_0=0$, $b_0=1$, $a_n=b_n=(n+1)2^n$ ($n=1,2,\cdots$)。

这时

$$z_n = n, \tag{58}$$

$$\mu_n = \frac{1}{(n+1)2^n}, \tag{59}$$

$$z = +\infty, \tag{60}$$

$$R=+\infty, S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)2^n}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1<+\infty. \quad (61)$$

因为$a_0=0$，所以Q保守，所以B型Q过程、F型Q过程和Q过 程均唯一。

§7 纯生情况

设$a_0\geqslant 0$，$b_0\geqslant 0$，$b_i>0$ $(i=1, 2, \cdots)$。形如

$$\begin{pmatrix} -(a_0+b_0) & b_0 & & & \\ & -b_1 & b_1 & & 0 \\ & & -b_2 & b_2 & \\ 0 & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1)$$

的Q-矩阵，叫做纯生Q-矩阵，对应的Q过程叫做纯生Q过程。

定理1 B型Q过程和Q过程唯一的充要条件均是

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i^{-1}=\infty, \quad (2)$$

F型Q过程唯一。

证 方程$\lambda\boldsymbol{U}-Q\boldsymbol{U}=\boldsymbol{0}$这时变成

$$\left.\begin{aligned} \lambda u_0+(a_0+b_0)u_0-b_0u_1&=0 \\ \lambda u_1+b_1u_1-b_1u_2&=0 \\ \cdots \quad \cdots& \\ \lambda u_i+b_iu_i-b_iu_{i+1}&=0 \\ \cdots \quad \cdots& \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

于是

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= \frac{\lambda+b_1}{b_1}u_1 \\ u_3 &= \frac{\lambda+b_2}{b_2}u_2 = \left(1+\frac{\lambda}{b_2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{b_1}\right)u_1 \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ u_{i+1} &= \frac{\lambda+b_i}{b_i}u_i = \left(1+\frac{\lambda}{b_i}\right)\left(1+\frac{\lambda}{b_{i-1}}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda}{b_1}\right)u_1 \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

若$\boldsymbol{U}\neq\boldsymbol{0}_1$，则由(3) 的第一式及(4) 知，无论$b_0=0$或$b_0>0$总有$u_1\neq0$且$u_i\uparrow(i\uparrow\infty)$。令

$$u_\infty=\lim_{i\to\infty}u_i=\left(1+\frac{\lambda+a_0}{b_0}\right)\prod_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda}{b_i}\right)u_1. \quad (5)$$

故$u_\infty<+\infty$的充要条件是$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda}{b_i}=\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{b_i}<\infty$. 于是方程

$$\left.\begin{aligned} &\lambda\boldsymbol{U}-Q\boldsymbol{U}=\boldsymbol{0}_1,\ \lambda>0 \\ &\boldsymbol{0}_1\leqslant\boldsymbol{U}\leqslant\boldsymbol{1} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

只有零解的充要条件是$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{b_i}=\infty$。于是由定理5.4.1知，$B$型纯生$Q$过程唯一的充要条件是(2) 成立。

方程$\lambda\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}Q=\boldsymbol{0}_-$这时变成：

$$\left.\begin{aligned} &\lambda u_0+(a_0+b_0)\,u_0=0 \\ &\lambda u_1-b_0u_0+b_1u_1=0 \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ &\lambda u_i-b_{i-1}u_{i-1}+b_iu_i=0 \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

故$u_0=0$，从而$u_i=0$ $(i=0,\ 1,\ \cdots)$。所以方程

$$\left.\begin{aligned} &\lambda\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}Q=\boldsymbol{0}_-,\ \lambda>0 \\ &\boldsymbol{0}_-\leqslant\boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\eta}\boldsymbol{1}<+\infty \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

只有零解. 故由定理6.2.1知，F型纯生Q过程唯一。因为纯生

Q-矩阵的非保守状态只可能是0这样一个，故再由定理8.5.1知，纯生Q过程唯一的充要条件是(2) 成立。定理证毕。

例1 设$b_i=b>0$ $(i=0, 1, \cdots)$

这时，我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i^{-1}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{b}=+\infty.$$

于是(2) 成立，故由定理1知Q过程唯一。这个唯一的Q过程通常叫做普瓦松过程。

例2 设$b>0$, $b_i=ib$ $\quad (i=0, 1, \cdots)$.

这时，我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i^{-1}=\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=+\infty,$$

于是(2) 成立，故由定理1知，Q过程唯一。这个唯一的Q过程通常叫做线性纯生过程或叫做简单纯生过程。

例3 设$b>0$, $b_i=2^i b$ $\quad (i=0, 1, \cdots)$.

这时，我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{b^i}=\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=\frac{1}{b}<+\infty,$$

于是(2) 不成立，故由定理1知F型Q过程唯一，B型Q过程和Q过程均不唯一。

§8 纯灭情况

设$b_0\geqslant 0$, $b_i>0$ $(i=1, 2, \cdots)$.形如

$$\begin{pmatrix} -b_0 & & & \\ b_1 & -b_1 & & 0 \\ & b_2 & -b_2 & \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{1}$$

的Q-矩阵叫做纯灭Q-矩阵，对应的Q过程叫做纯灭Q过程。

定理1 B型Q过程唯一. F型Q过程和Q过程唯一的充要条件均是$b_0=0$或

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(1+b_0)(1+b_1)\cdots(1+b_i)}{b_1b_2\cdots b_{i+1}}=+\infty. \qquad (2)$$

证 显然方程$\lambda \boldsymbol{U}-Q\boldsymbol{U}=\boldsymbol{0}_1$的解$\boldsymbol{u}\equiv\boldsymbol{0}_1$. 于是由定理5.4.3知$B$型纯灭$Q$过程唯一。

方程 $\lambda\eta-\eta Q=\boldsymbol{0}_1$，$\lambda>0$的解

$$\eta_0(\lambda)=\frac{\lambda+b_0}{b_1},$$

$$\eta_i(\lambda)=\frac{(\lambda+b_0)(\lambda+b_1)\cdots(\lambda+b_i)}{b_1\cdots b_{i+1}}.$$

于是 $$\sum_{i=0}^{\infty}\eta_i(1)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(1+b_0)(1+b_1)\cdots(1+b_i)}{b_1\cdots b_{i+1}}. \qquad (3)$$

故由定理6.2.1知F型纯灭Q过程唯一的充要条件是$b_0=0$或(2)成立。因为Q的非保守状态只可能是0这样一个，故再由定理8.5.1知，纯灭Q过程唯一的充要条件是$b_0=0$或(2)成立. 定理证毕。

例1 设 $b_i=b>0$ $(i=0,1,\cdots)$。

这时，我们有

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(1+b_0)(1+b_1)\cdots(1+b_i)}{b_1b_2\cdots b_{i+1}}\geqslant\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{b_{i+1}}$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{b}=+\infty,$$

于是(2)成立，故由定理1知Q过程唯一。

例2 设 $b>0$，$b_i=ib$ $(i=0,1,\cdots)$。

这时，我们有

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(1+b_0)(1+b_1)\cdots(1+b_i)}{b_1b_2\cdots b_{i+1}}\geqslant\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{b_{i+1}}=\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=+\infty,$$

于是（2）成立，故由定理1知Q过程唯一。这个唯一的 Q 过程通常叫做线性纯灭过程，或叫做简单纯灭过程。

例3 设 $b_i=2^{2i}$ $(i=0,1,\cdots)$。

这时，我们有

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(1+b_0)(1+b_1)\cdots(1+b_i)}{b_1b_2\cdots b_{i+1}}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}(1+b_0)\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\cdot\frac{1}{b_{i+1}}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}(1+2^0)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2i}}\right)\cdot\frac{1}{2^{2(i+1)}}$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}2^{i+1}\frac{1}{2^{2(i+1)}}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^{i+1}}=1<+\infty,$$

于是（2）不成立，故由定理1知F型Q过程唯一，B 型 Q过程和Q过程均不唯一。

§9 非保守分枝情况

定义1 若

$$q_{ij}=\begin{cases}iq_{1,\,j-i+1}, & j\geqslant i-1,\\ 0, & j<i-1,\end{cases}\quad (i,j\in E), \tag{1}$$

则称Q为分枝Q-矩阵。

显然，对于分枝Q-矩阵，其非保守的充要条件是

$$q_1>\sum_{j\neq 1}q_{1j}. \tag{2}$$

定理1 对于任给的一个非保守分枝Q-矩阵，B型Q过程唯一。

证 分两种情况证明

(I) $\sum_{j\neq 1} q_{1j}=0$。 (3)

这时方程（5.4.1）变成

$$\left.\begin{aligned}&\lambda u_0=0,\\&(\lambda+q_1)u_1=0,\\&(\lambda+2q_1)u_2=0,\\&\cdots\quad\cdots\\&(\lambda+kq_1)u_k=0,\\&\cdots\quad\cdots\\&0\leqslant u_i\leqslant 1\ (i\in E).\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

于是 $u_i\equiv 0\ (i\in E)$。

(II) $\sum_{j\neq 1} q_{1j}>0$。 (5)

令 $$a=\frac{q_1}{\sum_{j\neq 1} q_{1j}}.\tag{6}$$

由（2）及（5）知

$$1<a<+\infty.\tag{7}$$

这时方程（5.4.1）中的第一个变成

$$\left.\begin{aligned}\lambda u_0=0\\-q_{10}u_0+(\lambda+q_1)u_1-q_{12}u_2-q_{13}u_3-\cdots=0\\-2q_{10}u_1+(\lambda+2q_1)u_2-2q_{12}u_3-\cdots=0\\-3q_{10}u_2+(\lambda+3q_1)u_3-\cdots=0\\\cdots\quad\cdots\quad\cdots\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

于是$u_0=0$。设$\{u_n\}$是（8）的非零解。令$u_1,u_2,\cdots$中第一个大

于零者为$u_{k_1}>0$，由(7)和(8)知，必存在$n>k$，使

$$u_n \geqslant \frac{a(\lambda+k_1q_1)}{k_1q_1}u_{k_1}. \tag{9}$$

令
$$k_2=\min\left\{n \,\middle|\, u_n \geqslant \frac{a(\lambda+k_1q_1)}{k_1q_1}u_{k_1},\ n>k_1\right\}. \tag{10}$$

注意(7)、(8)和$u_{k_1}-1<u_{k_1}$知，存在$n>k_2$，使

$$u_n \geqslant \frac{a(\lambda+k_2q_1)}{k_2q_1}u_{k_2}. \tag{11}$$

令
$$k_3=\min\left\{n \,\middle|\, u_n \geqslant \frac{a(\lambda+k_2q_1)}{k_2q_1}u_{k_2},n>k_2\right\}. \tag{12}$$

如此继续作下去,我们就得到一串严格上升的正整数序列$\{k_n\}$，且

$$\begin{aligned}
u_{k_{m+1}} &\geqslant \frac{a(\lambda+k_mq_1)}{k_mq_1}u_{k_m} \\
&\geqslant a^m\left(\frac{\lambda+k_mq_1}{k_mq_1}\right)\left(\frac{\lambda+k_{m-1}q_1}{k_{m-1}q_1}\right)\cdots\left(\frac{\lambda+k_1q_1}{k_1q_1}\right)u_{k_1} \\
&\geqslant u_{k_1}a^m\uparrow+\infty \quad (n\uparrow+\infty).
\end{aligned} \tag{13}$$

故$\{u_{k_m}\}$无界。从而$\{u_m\}$无界。这表示方程（8）没有非负非零的有界解。即方程（5.4.1）只有零解。于是由定理5.4.1知B型Q过程唯一。

定理2 对于任给的一个非保守的分枝Q-矩阵，F型Q过程唯一。(本定理对于保守情况也成立)

证 此时方程（6.2.1）变成

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda\eta_0=q_{10}\eta_1 \\
&\lambda\eta_1=-q_1\eta_1+2q_{10}\eta_2 \\
&\lambda\eta_2=q_{12}\eta_1-2q_1\eta_2+3q_{10}\eta_3 \\
&\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\
&\lambda\eta_n=q_{1n}\eta_1+2q_{1,n-1}\eta_2+\cdots-nq_1\eta_n+(n+1)q_{10}\eta_{n+1} \\
&\qquad 0\leqslant\eta_i,\quad \sum_i\eta_i<+\infty.
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

若$q_{10}=0$，则（14）显然只有零解，于是由定理6.2.1知，F型Q过程唯一。

若$q_{10}>0$，则由（14）得

$$\eta_{k+1}=\frac{1}{(k+1)q_{10}}[kq_1\eta_k-(k-1)q_{12}\eta_{k-1}$$

$$-(k-2)q_{13}\eta_{k-2}-\cdots-q_{1k}\eta_1+\lambda\eta_k]$$

$$\eta_k=\frac{1}{kq_{10}}[(k-1)q_1\eta_{k-1}-(k-2)q_{12}\eta_{k-2}$$

$$-\cdots-q_{1,k-1}\eta_1+\lambda\eta_{k-1}]$$

$$\eta_k=\frac{1}{(k-1)q_{10}}[(k-2)q_1\eta_{k-2}$$

$$-\cdots-q_{1,k-2}\eta_1+\lambda\eta_{k-2}]$$

$$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$

$$\eta_2=\frac{1}{2q_{10}}[q_1\eta_1+\lambda\eta_1]。$$

因此，若$\lambda=2q_{10}>0$，我们有

$$\sum_{j=2}^{k+1}\eta_j=\frac{\lambda}{q_{10}}\sum_{1}^{k}\frac{\eta_j}{j+1}+\frac{1}{q_{10}}\Big[\frac{k}{k+1}q_1\eta_k+(k-1)$$

$$\left(\frac{q_1}{k}-\frac{q_{12}}{k+1}\right)\eta_{k-1}$$

$$+(k-2)\left(\frac{q_1}{k-1}-\frac{q_{12}}{k}-\frac{q_{13}}{k+1}\right)\eta_{k-2}+\cdots$$

$$+1\left(\frac{q_1}{2}-\frac{q_{12}}{3}-\cdots-\frac{q_{1k}}{k+1}\right)\eta_1\Big]$$

$$\geqslant\frac{\lambda}{q_{10}}\sum_{j=1}^{k}\frac{\eta_j}{j+1}+\frac{1}{q_{10}}\Big[\frac{k}{k+1}q_1\eta_k$$

$$+(k-1)\left(\frac{q_1-q_{12}}{k}\right)\eta_{k-1}$$

$$+(k-2)\left(\frac{q_1-q_{12}-q_{13}}{k-1}\right)\eta_{k-2}+\cdots$$

$$\left.+1\left(\frac{q_1-q_{12}-\cdots-q_{1k}}{2}\right)\eta_1\right]$$

$$\geqslant\frac{\lambda}{q_{10}}\sum_{j=1}^{k}\frac{\eta_j}{j+1}+\frac{1}{q_{10}}\left[\frac{k}{k+1}q_{10}\eta_k\right.$$

$$\left.+\frac{k-1}{k}q_{10}\eta_{k-1}+\cdots+\frac{1}{2}q_{10}\eta_1\right]$$

$$=2\sum_{j=1}^{k}\frac{\eta_j}{j+1}+\sum_{j=1}^{k}\frac{j\eta_j}{j+1}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\frac{\eta_j}{j+1}+\sum_{j=1}^{k}\eta_j. \qquad (15)$$

从而有

$$\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j\geqslant\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\eta_j}{j+1}+\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j.$$

于是，由 $\eta_j\geqslant 0$ $(j=0,1,\cdots)$ 和 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\eta_j<+\infty$ 得 $\eta_j=0$ $(j=1,2,\cdots)$。再由（14）的第一式得 $\eta_0=0$。从而由引理6.1.2知(14)只有零解。于是由定理6.2.1知，F型Q过程唯一。定理证毕。

引理1 对于非保守的分枝Q-矩阵，最小Q过程 $(f_{ij}(t))$ 有如下性质：

$$\left(\sum_{j\in E}f_{ij}(t)\right)^i=\sum_{j\in E}f_{ij}(t)\quad(i\in E,t\geqslant 0). \qquad (16)$$

证 由$f_{ij}(t)$ 是F型Q过程知

$$f'_{ij}(t)=\sum_{k\in E}f_{ik}(t)q_{kj}. \qquad (17)$$

令 $$F_i(t,x)=\sum_{j\in E} f_{ij}(t)x^j,\quad (t\geqslant 0, |x|\leqslant 1)。\tag{18}$$

由定理1.4.1知 $f'_{ij}(t)$ 连续且

$$|f'_{ij}(t)|\leqslant 2q_i。$$

于是当 $|x|<1$ 时

$$\sum_{j\in E}|f'_{ij}(t)x^j|\leqslant \sum_{j\in E}2q_i|x|^j=2q_i\sum_{j\in E}|x|^j<+\infty。\tag{19}$$

故由定理10.1.9得

$$\frac{\partial}{\partial t}F_i(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}\sum_{j\in E}p_{ij}(t)x^j$$

$$=\sum_{j\in E}p'_{ij}(t)x^j,\quad |x|<1。\tag{20}$$

由（17）和（20）得

$$\frac{\partial F_i(t,x)}{\partial t}=\sum_{j\in E}\left(\sum_{k\in E}f_{ik}(t)q_{kj}\right)x^j$$

$$=\sum_{j\in E}\left(\sum_{k\neq j}f_{ik}(t)q_{kj}-f_{ij}(t)q_j\right)x^j,\ |x|<1.\tag{21}$$

由 $q_j=jq_1$ 得

$$\sum_{j\in E}|f_{ij}(t)q_jx^j|=\sum_{j\in E}f_{ij}(t)j|x|^j$$

$$\leqslant\sum_{j\in E}j|x|^j<+\infty,\quad |x|<1。\tag{22}$$

由（19）、（20）、（21）、（26）和定理10.1.1得

$$\frac{\partial F_i(t,x)}{\partial t}=\sum_{j\in E}\sum_{k\neq j}f_{ik}(t)q_{kj}x^j+\sum_{j\in E}f_{ij}(t)q_{jj}x^j$$

$$=\sum_{k\neq j}\sum_{j\in E}f_{ik}(t)q_{kj}x^j+\sum_{j\in E}f_{ij}(t)q_{jj}x^j$$

$$=\sum_{k\in E}\sum_{j\in E}f_{ik}(t)q_{kj}x^j$$

$$=\sum_{k\in E}f_{ik}(t)\sum_{j\geq k-1}kq_{1,j-k+1}x^j$$

$$=\sum_{k\in E}kf_{ik}(t)x^{k-1}\sum_{j\geq k-1}q_{1,j-k+1}x^{j-k+1}$$

$$=\sum_{k\in E}kf_{ik}(t)x^{k-1}\sum_{j\in E}q_{1j}x^j$$

$$=\sum_{k\in E}kf_{ik}(t)x^{k-1}f(x)$$

$$=f(x)\sum_{k\in E}kf_{ik}(t)x^{k-1},\quad |x|<1, \tag{23}$$

其中
$$f(x)=\sum_{j\in E}q_{1j}x^j,\quad |x|<1。\tag{24}$$

由 $F_i(t,x)=\sum_{k\in E}f_{ik}(t)x^k$ 作为 x 的幂级数在 $[-1,1]$ 上绝对收敛

及定理10.1.11得

$$\frac{\partial F_i(t,x)}{\partial x}=\sum_{k\in E}kf_{ik}(t)x^{k-1},\quad |x|\leqslant 1. \tag{25}$$

由（23）和（25）得

$$\frac{\partial F_i(t,x)}{\partial t}=f(x)\frac{\partial F_i(t,x)}{\partial x},\quad (i\in E,|x|<1). \tag{26}$$

由于 $p_{ij}(0)=\delta_{ij}$，所以

$$F_i(0,x)=x^i \tag{27}$$

由（26）和（27）得

$$\left.\begin{aligned} \partial F_i(t,x) &= f(x)\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}, \\ F_i(0,x) &= x^i, (|x|<1, t\geqslant 0). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

由于Q非保守，所以$q_1 \neq 0$，从而

$$f(x) \neq 0。 \tag{29}$$

下面分两种情况讨论：

i) $q_{10}=0$。

这时 $f(0)=0$，而

$$f'(0)=\sum_{k\in E} k q_{1k} x^{k-1}\Big|_{x=0} = q_{11} = -q_1 < 0. \tag{30}$$

于是由 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上连续知，存在常数 $0<b<1$，使

$$f(x)<0 \qquad (0<x\leqslant b). \tag{31}$$

在区域 $t\geqslant 0$，$0<x\leqslant b$ 中解方程 (28) 得

$$w(x)+t=w(F_i^{\frac{1}{i}}(t,x)),\ (t\geqslant 0, 0<x\leqslant b), \tag{32}$$

其中 $$w(x)=\int_b^x \frac{ds}{f(s)},\ (0<x\leqslant b). \tag{33}$$

由 (31) 知，$w(x)$是x的单调增函数，由此可知在区域 $t\geqslant 0$，$0<x\leqslant b$内唯一决定$F_i(t,x)$，且

$$F_i(t,x)=(F_1(t,x))^i \quad t\geqslant 0,\ 0<x\leqslant b. \tag{34}$$

ii) $q_{10}\neq 0$。

即 $$\sum_{j=0}^{\infty} f_{ij}(t)x^j = \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{\sum_{S=1}^{i} j_S=j}\ \prod_{S=1}^{i} f_{1j_S}(t)\Big)x^j,$$

$$t\geqslant 0, 0<x\leqslant b. \tag{35}$$

由于上式两端的幂级数的系数都非负。故由定理10.2.4知，当$x\downarrow 0$时，(35) 变成

$$f_{i0}(t)=(f_{10}(t))^i。 \tag{36}$$

由(34)、(35)、(36) 以及$F_i(t,x)$和$F_1(t,x)$都是幂级数得

$$F_i(t,x)=(F_1(t,x))^i,\quad t\geqslant 0,|x|\leqslant b. \tag{37}$$

即

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_{ij}(t)x^j=\sum_{j=0}^{\infty}\Big\{\sum_{\sum_{S=1}^{i} i_S=j}\prod_{S=1}^{i} f_{1i_S}(t)\Big\}x^j,$$

$$t\geqslant 0,\quad |x|\leqslant b. \tag{38}$$

由定理10.1.11知，(38) 两端对任意t可在$|x|<b$内逐项对x求任意阶导数，于是有

$$j!f_{ij}(t)=\frac{\partial^j}{\partial x^j}\Big(\sum f_{ij}(t)x^j\Big)\Big|_{x=0}$$

$$=\frac{\partial^j}{\partial x^j}\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{\sum_{S=1}^{i} i_S=j}\prod_{S=1}^{i} f_{1i_S}(t)\Big)x^j\Big|_{x=0}$$

$$=j!\sum_{\sum_{S=1}^{i} i_S=j}\prod_{S=1}^{i} f_{1i_S}(t). \tag{39}$$

再注意 $\sum |f_{ij}(t)|=\sum_{j=0}^{\infty} f_{ij}(t)\leqslant 1,$

即

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_{ij}(t)x^j=\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{\sum_{S=1}^{i} i_S=j}\prod_{S=1}^{i} f_{1i_S}(t)\Big)x^j,$$

$$t\geqslant 0,|x|\leqslant 1. \tag{40}$$

即 $$F_i(t,x)=F_1^i(t,x),\quad t\geqslant 0,\quad |x|\leqslant 1. \tag{41}$$

于是若令 $x=1$ 立得

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_{ij}(t)=\Big(\sum_{j=0}^{\infty} f_{1j}(t)\Big)^i \quad (i\in E). \tag{42}$$

令 $$y=f(x)。\tag{43}$$

于是 $$y|_{x=0}=f(0)=q_{10}>0。\tag{44}$$

$$y'|_{x=0}=f'(x)|_{x=0}=\sum_{k\in E}kq_{1k}x^{k-1}|_{x=0}$$

$$=q_{11}=-q_1<0。\tag{45}$$

$$y|_{x=1}=f(1)=\sum_{k\in E}q_{1k}<0。\tag{46}$$

$$y''=f''(x)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)q_{1k}x^{k-2}\geqslant 0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1。\tag{47}$$

由（47）知$y=f(x)$在$[0,1]$之间是条斜率为负的直线或是凸函数。于是由（44）及（46）知，在$(0,1)$之间$y=f(x)$恰好有一个零点$0<\xi<1$，且

$$y=f(x)>0\quad(0<x<\xi)\tag{48}$$

在区域$t\geqslant 0$，$0<x<\xi$由解方程（28）得

$$g(x)+t=g(F_t^{\frac{1}{1}}(t,x))\quad(t\geqslant 0,0<x<\xi),\tag{49}$$

其中 $g(x)=\int_0^x\frac{ds}{f(s)}$。

仿 i) 中讨论，易证。

$$\left(\sum_{j\in E}f_{1j}(t)\right)'=\sum_{j\in E}f_{ij}(t)\quad(t\geqslant 0)。\tag{50}$$

联合（42）和（50）立得（21）。

至此，引理得证。

定理3 若Q是非保守的，则Q过程不唯一。

证 显然，Q非保守的充要条件是$\sum_{j\in E}q_{1j}<0$。从而当Q非保守时，1为一个非保守状态。于是由定理4.4.3知

$$\sum_{j\in E} p_{1j}(t)<1 \qquad (t>0)。\tag{51}$$

故 $$\sum_{j\in E} p_{i_lj}(t)=\Big(\sum_{j\in E} p_{1j}(t)\Big)^l \downarrow 0,\ (l\uparrow+\infty)\ (t>0)。\tag{52}$$

所以 $$\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{i_lj}(\lambda)=\lambda\sum_{j\in E}\int_0^\infty e^{-\lambda t} f_{i_lj}(t)dt$$

$$=\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\sum_{j\in E} f_{i_lj}(t)dt\downarrow \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\cdot 0dt=0,$$

$$(l\uparrow+\infty)。\tag{53}$$

于是 $$\inf\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{i_lj}(\lambda)=0。\tag{54}$$

故定理7.1.1中的条件（i）不成立，因此Q过程非唯一．定理得证。

第 9 章

进一步研究的有关课题

§1 Q-矩阵问题定性理论

对于任给一个Q-矩阵，上面我们提出了Q过程、B型Q过程和F型Q过程三个概念，并解决了这三种Q过程的存在性和唯一性。但还有一个基本问题我们未有提及，那就是把这三种Q过程全部构造出来的问题。从定性和定量角度来看，我们提出的三种Q过程的存在和唯一性是属于Q-矩阵问题中的定性问题，把这三种Q过程全部构造出来的问题的讨论是属于Q-矩阵定量问题。关于定量问题的讨论不是本书的任务，以后就不再提及了。

其实，应提出加以考察的Q过程远不止上面所提出的三种（但这三种是最基本的），关于Q-矩阵的定性问题也不止上面提到的那些。现在我们提出如下廿种Q过程（包括已提出的三种）：O型、B型、F型、$B\cap F$型、$\bar{B}\cap\bar{F}$型、$\bar{B}$型、$\bar{F}$型、$\bar{B}\cap F$型、$B\cap\bar{F}$型、$B\cup F$型、N-O型、N-B型、N-F型、N-$B\cap F$型、N-$B\cap\bar{F}$型、N-$\bar{B}$型、N-F型、N-$\bar{B}\cap F$型、N-$B\cap\bar{F}$型和N-$B\cup F$型Q过程。所谓O型Q过程是指一般Q过程；$B\cap F$型Q过程指的既是B型也是F型Q过程；N-O型Q过程指的是诚实的O型Q过程；$N\ B\cup F$型Q过程指的是诚实的B型或F型Q

过程，余类推。对于这廿种Q过程，主要有下列定性问题需要解决：上述廿种类型的Q过程的每一种类型不存在，恰好存在一个，有多个但有限以及有无穷多个这种类型的Q过程这四种情况，哪些情况是必然出现的，哪些是可能出现的以及使可能出现的情况必然出现的充要条件是什么？

欲进一步学习和研究这些问题的读者可阅读文献〔9〕的第十四章，那里给出了这些问题的全部解答。

§2 有势Q-矩阵问题定性理论

定义1 设$P(t)=(p_{ij}(t))$是一个Q过程，若存在正实数列(u_i)使

$$u_i p_{ij}(t)=u_j p_{ji}(t) \quad (i,\ j\in E,\ t\geqslant 0) \tag{1}$$

成立，则$P(t)$称为有势Q过程。若(u_i)还是一个分布，且$p_{ij}(t)\neq 0$ $(i,\ j\in E,\ t>0)$，则称$P(t)$是可逆的。

定义2 任给一个Q-矩阵，若有正实数列(u_i)，使

$$u_i q_{ij}=u_j q_{ji} \quad (i,\ j\in E) \tag{2}$$

成立，则称Q为有势Q-矩阵，若(u_i)还是一个分布，则称Q是可配称的。

引理1 若$P(t)$为一有势(可逆)Q过程，则Q是有势（可配称）的。

证 (1)的两边对t求导立得(2)。引理得证。

出于物理、化学和生物等学科的考虑，我们需要解决如下问题：对任何一个有势（可配称）Q-矩阵，有势（可逆）Q过程存在和唯一的充要条件是什么？

欲学习和研究上述问题，可阅读文献〔10〕中的第二、三和六章。但那里只是为这一课题奠定了理论基础，上面提到的基本问题还远没有得到最终解答。

§3 瞬时情况

设$P(t)$是一个马氏过程，在第一章§3中我们证明了$p'_{ii}(0)=-q_i$总存在，但可能$q_i=+\infty$，若$q_i=+\infty$，我们称i为瞬时状态。可以证明，不论$q_i<+\infty$或$q_i=+\infty$，$p'_{ij}(0)=q_{ij}$总存在，且$q_{ij}<+\infty$。

定义1 一个（允许有无穷元素的）矩阵$Q=(q_{ij})$叫做一个Q-矩阵，如果存在马尔可夫过程$P(t)=(p_{ij}(t))$，使

$$p'_{ij}(0)=q_{ij}\quad (i,\ j\in F) \tag{1}$$

成立。如果一个Q-矩阵的对角线元素$q_{ii}=-q_i>-\infty\ (i\in E)$，则称$Q$为全稳定$Q$-矩阵；若$q_{ii}=-q_i=-\infty (i\in E)$，则称$Q$为全瞬时的$Q$-矩阵；若存在$j\in E$，使$q_{jj}=-q_j=-\infty$，则称$Q$为瞬时$Q$-矩阵。

根据这一定义，我们以前所讨论的Q-矩阵都是指现在意义下的全稳定Q-矩阵。我们已经指出，对于全稳定Q-矩阵，定性理论已取得深刻而系统的成果。但是，对于瞬时Q-矩阵的情形的研究十分困难，就连这种情形的Q-矩阵的特征（即一个矩阵成为这种Q-矩阵的充要条件）这个最基本的问题都未能给出解答。但出乎意料的是，对于全瞬时Q-矩阵的情形的研究在D·W·Williams教授的顽强努力下，却取得了惊人的进展。他主要给出了全瞬时Q-矩阵的优美的充要条件。为了使读者也能享受这一漂亮的成果，我们在这里把它写出来。

定理1 一个矩阵$Q=(q_{ij})$是一个全瞬时Q-矩阵的充要条件是下列三条同时成立：

i) $-q_{ii}=+\infty\ (i\in E)$；$0\leqslant q_{ij}<+\infty (i\neq j;\ i,j\in E)$。(1)

ii) $\sum\limits_{j\notin\{i,k\}}\min(q_{ij},\ q_{kj})<+\infty\ \ (\forall i,\ k,\ i\neq k)$。 (2)

iii) 存在E的一个无穷子集$\boldsymbol{K}$，使

$$\sum_{j\in K\setminus\{i\}} q_{ij} < +\infty \quad (i\in E). \tag{3}$$

这一结果确实漂亮，但它的证明实在太需要向着既严格又易懂的方向改进了，因为它太难读懂和使人信服。尽管如此，欲学习和研究瞬时Q–矩阵的情形的读者还是应从阅读D・W・Williams的文献〔15〕、〔16〕和〔17〕着手，因为在这方面作出出色成果的除D・W・Williams教授外别无他人。

瞬时Q–矩阵的情形的（定性和定量）问题是当前马氏过程研究中最难解决的问题之一。

第10章

附录：有关的预备知识

为了查阅方便，在这里我们将列举出本书所用到的分析中一些有关定理。对其中大多数只指出其出处，而将证明略去。我们只给出了定理10.3.1和定理10.3.2的证明。按流行办法，定理10.3.1是作为更一般的（对可测函数，而不是对连续函数陈述的）定理的简单推论而得到的。但这些更一般的定理的证明却牵涉到较高深的工具（例如，牵涉到概率论中常用的λ-系和π-系的概念和性质）。所以在这里我们给出了它的直接且较初等的证明。

§1 数学分析

定理1 若三级数 $\sum_n a_n$，$\sum_n b_n$ 及 $\sum_n (a_n+b_n)$ 有两个收敛，则另外一个也收敛，且

$$\sum_n (a_n+b_n)=\sum_n a_n+\sum_n b_n.$$

本定理是[1,355的4°]的明显推论。

定理2 若 $a_{ik}\geqslant 0$，则

$$\sum_i \sum_k a_{ik}=\sum_k \sum_i a_{ik}.$$

本定理是[1，第十一章，§5，定理3]的直接推论。

定理3 如果

$$\sum_k \sum_i |a_{ik}| < +\infty,$$

则
$$-\infty < \sum_i \sum_i a_{ik} = \sum_i \sum_k a_{ik} < +\infty.$$

本定理就是[1，第十一章，§5，定理8]。

定理4 若函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上有定义而且连续，则它在这个区间上必能达到自己的上确界和下确界。换言之，在区间$[a, b]$上必能求出$x=x_0$及$x=x_1$，使$f(x_0)$和$f(x_1)$依次为$f(x)$的一切数值中的最大者和最小者。

本定理是[1，85]中的定理。

定理5 （康托定理）

若函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上有定义而且连续，则它在这个闭区间上一致连续。

本定理是[1，87]中的定理。

定理6 （微分中值定理）

若$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，在开区间(a, b)内可导，则必存在$a<\xi<b$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

成立。

本定理是在[1，112]中陈述的拉格朗日定理。

定理7 设函数$f(t)$在$[a, b]$上可积，且$f(t)$在$t=x_0\in(a, b)$上连续。若令

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)dt \quad x\in[a, b],$$

则
$$\Phi'(x)\Big|_{x=x_0} = f(x_0).$$

本定理是[1，393，12°]。

定理8

i）设$f_n(x)$（$n=0,1,\cdots$）是定义于区域$\mathscr{X}$上的函数叙列，且

$$|f_n(x)|\leqslant a_n,$$

$$\sum_n a_n<+\infty$$

以及极限$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\in\mathscr{X})}} f_n(x)$存在，则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\in\mathscr{X})}}\sum_n f_n(x)=\sum_n\lim_{x\to x_0}f_n(x).$$

ii）若$f_n(x)$（$n=0,1,\cdots$）在$[a,\ b]$上可积，且当$n\to\infty$时$f_n(x)$一致收敛，则

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\lim_{n\to+\infty}f_n(x)dx.$$

本定理的i）是[1，403和405的定理3]的直接推论。ii）是[1，468的定理1]。

定理9 若$f_n(x)$（$n=0,1,\cdots$）在$[a,\ b]$上连续，且

$$|f_n(x)|\leqslant a_n$$

及

$$\sum_n a_n<+\infty,$$

则$\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(x)$在$[a,\ b]$上连续而且有界.

本定理是[1，403和404的定理1]的直接推论。

定理10 若$f_n(x)$（$n=0,1,\cdots$）在$[a,\ b]$上可导，且有

$$|f_n'(x)|\leqslant a_n$$

及

$$\sum_n a_n<+\infty,$$

则$\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(x)$在$[a,\ b]$上可导，且

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x).$$

本定理是[1，403和407的定理6]的直接推论。

定理11 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在它的收敛区间内可以逐项求微商。

本定理是[1，409，$g°$]。

§2 实变函数

定理1 设$f_n(x)$ $(n=0,1,\cdots)$是在可测集A上定义的可测函数。如果函数$F(x)$使关系

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = F(x)$$

在A上几乎处处成立，那么$F(x)$是一个可测函数。从而若$u_n(x)\geqslant 0(n=0,1,\cdots)$是在$A$上的非负可测函数，则$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$在$A$上可测。

本定理是[2，第四章，§2，定理3]。

定理2 若$f(x)$在可测集A上可积，则它在A上几乎处处有限。

本定理是[2，第六章，§1，定理1]。

定理3 若$f_n(x)\geqslant 0$ $(n=0,1\cdots)$是定义在A上的非负可测函数，且

$$f_0(x)\leqslant f_1(x)\leqslant\cdots,$$

则
$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)dx = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

从而，如果$u_n(x)\geqslant 0$ $(n=0,1,\cdots)$是定义在A上的非负可测函数，则

$$\int_A \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_A u_n(x)dx.$$

本定理是[2，第六章，§1，定理10]。

定理4 若$f_n(x)$ $(n=0,1,\cdots)$是定义在可测集A上的可积函数，且

$$f_0(x)\geqslant f_1(x)\geqslant\cdots,$$

则
$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)dx=\int_A \lim_{n\to\infty}f_n(x)dx.$$

本定理实质上是[4，第二章，§4，定理1的系]，只是那里把可测集限制为区间[a，b]，但这不是本质的。

定理5（法都引理）

设$f_n(n=0,1,\cdots)$，h都是定义在可测集A上的可积函数。如果在A上几乎处处有$h(x)\leqslant f_n(x)$，则

$$\int_A \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)dx\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int f_n(x)dx.$$

本定理实质上就是[4，第二章，§4，定理2]。所不同的只是：i）那里把可测集A限制为区间[a,b]，但这不是本质的，只是为了方便；ii）$\varliminf_{n\to\infty}\int_A f_n(x)dx<+\infty$，但这没有必要，因为当$\varliminf_{n\to\infty}\int_A f_n(x)dx=+\infty$时定理显然成立。

定理6 设$f_n(x)$ $(n=0,1,\cdots)$是定义在可测集A上的几乎处处收敛的函数列，且存在定义在A的可积函数$g(x)$，使

$$|f_n(x)|\leqslant g(x)\quad(n=0,1,\cdots),$$

则
$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E \lim_{n\to\infty}f_n(x)dx.$$

本定理是[2，第六章，定理1]和“度量收敛必几乎处处收敛”这一简单事实的直接推论。

定理7 若$f(x)$在[a，b]上可积，则不定积分

$$\Phi(x)=\int_a^x f(x)dx \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

是绝对连续函数（从而是连续的），且几乎处处有

$$\Phi'(x)=f(x)。$$

本定理是[2，第九章，§4，定理1]。

定理8 若一函数满足李普希斯（Lipschitz）条件，则它绝对连续。

本定理是[2，第九章，§1，定理2]和"$f(x)\equiv 1$是绝对连续函数"这一简单事实的直接推论。

定理9 绝对连续函数几乎处处可导，且它等于其几乎处处导数的不定积分。

本定理是[2，第九章，§4，定理3]。

定理10 （富比尼定理）

若$f_n(x)$（$n=0,1,\cdots$）为$[a,b]$上的非减函数列，级数$\sum_n f_n(x)$收敛，则几乎处处有

$$\Big(\sum_n f_n(x)\Big)'=\sum_n f_n'(x)。$$

本定理是[3，定理5.4·6]。

定理11 （Dini定理）

若$f(x)$在$[0,\infty)$上有限连续，且

$$D_+^+ f(x)\geqslant 0,$$

则$f(x)$是$[0,\infty)$上的非减函数。这里D_+^+表示右下导数。

本定理见[5，第204页]。

定理12（富比尼定理）

平面上的一个L-可测集为L-零测集的充要条件是它的几乎一切x-截（或几乎一切y-截）是直线上的L-零测集。

本定理是[2，第一章，§5，定理的系1和系2]。

§ 3　拉氏变换

设$\varphi(t)$是$[0,\ +\infty)$上的连续函数，若

$$f(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(t)dt\quad(\lambda>0)$$

存在，则称$f(\lambda)$为$\varphi(t)$的拉普拉斯变换，简称拉氏变换。

引理1　设$f(x)$为$[0,1]$上的连续函数，令

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k},$$

则当$n\to\infty$时

$$B_n(x)\to f(x)\tag{1}$$

在$[0,1]$上一致地成立。

证　首先证明两个简单的事实。以C_n^k表示从n个元素中每次取出k个元素的组合数。

1°　试证

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=1。\tag{2}$$

事实上，于恒等式

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$$

中，置$a=x$，$b=1-x$即得(2)。

2°　试证

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\ C_n^k x^k(1-x^k)\leqslant\frac{n}{4}。\tag{3}$$

将等式

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k = (1+z)^n \tag{4}$$

关于z求导数，再乘以z，则得

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k z^k = nz(1+z)^{n-1}. \tag{5}$$

又将(5)关于z求导数，再乘以z，乃得

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k z^k = nz(1+nz)(1+z)^{n-2}. \tag{6}$$

于(4)、(5)、(6)中置 $z=\dfrac{x}{1-x}$后，再乘以$(1-x)^n$，乃得

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1. \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx. \tag{8}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x+nx). \tag{9}$$

以n^2x^2乘(7)，$-2nx$乘(8)，1乘(9)，然后两边相加，乃得

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x) = n(-x^2+x)$$

$$= n\left[-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] \leqslant \frac{n}{4}.$$

故(3)成立。

现在转向引理的证明。由定理10.1.4知，在闭区间上的连续函数一定达到最大值且这个最大值是有限的，故可令

$$M=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|<+\infty.$$

由定理10.1.5知，在闭区间上的连续函数必一致连续。所以对于正数ε，有正数δ，当$|x''-x'|<\delta$时，

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon.$$

设$x\in[0,1]$，由(2)得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}.$$

从而 $$|B_n(x)-f(x)|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}. \tag{10}$$

将整数$k=0,1,2,\cdots$分成A和B两组：

当$\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta$时，$k\in A$；

当$\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta$时，$k\in B$。

因此，当$k\in A$时

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|<\varepsilon,$$

由(2)，得

$$\sum_{A}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\leqslant\varepsilon\sum_{A}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\leqslant\varepsilon\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\varepsilon. \tag{11}$$

若$k\in B$，则

$$\frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2}\geqslant 1.$$

于是，由(3)得

$$\sum_{B}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\leqslant\frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{B}(k-nx)^2C_n^k(1-x)^{n-k}$$

$$\leqslant\frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\ C_n^k(1-x)^{n-k}$$

$$\leqslant\frac{M}{2n\delta^2}. \tag{12}$$

总合(10)、(11)、(12)三式，得

$$|B_n(x)-f(x)|<\varepsilon+\frac{M}{2n\delta^2},\ x\in[0,1].$$

取$n>\dfrac{M}{2\varepsilon\delta^2}$，则得

$$|B_n(x)-f(x)|<2\varepsilon.$$

引理得证。

定理1 设$\varphi(t)$是$[0,+\infty)$上的有界连续函数，则

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(t)dt=0,\ (\lambda>0) \tag{13}$$

的充要条件是

$$\varphi(t)\equiv 0,\ (t\geqslant 0). \tag{14}$$

证 条件的充分性不待证。下面证明条件的必要性。由(13)得

$$\int_0^\infty e^{-nt}\varphi(t)dt=0,\ (n=1,2,\cdots).$$

令$s=e^{-t}$，$\psi(s)=\varphi(-\ln s)$，$(0<s\leqslant 1)$。 $\psi(0)=0$， 显见$\psi(s)$在[0,1]上有界，在(0,1]上连续，且

$$\int_0^1 s^{n-1}\psi(s)ds=0,\ (n=1,2,\cdots).$$

从而
$$\int_0^1 P_n(s)\psi(s)ds=0,\ (n=0,1,\cdots). \tag{15}$$

于此，$P_n(s)$为s的n次多项式．设$f(x)$是[0,1]上的一个连续函数．由引理1知，有一列多项式$B_n(x)$，$(n=0,1,2\cdots)$存在，使当$n\to\infty$时

$$B_n(x)\to f(x)$$

在[0,1]上一致成立．注意到$\psi(s)$的有界性，于是当$n\to\infty$时

$$B_n(x)\psi(x)\to f(x)\psi(x)$$

在[0,1]上一致成立．再由(15)及定理10.1.8得

$$\int_0^1 f(s)\psi(s)ds=0. \tag{16}$$

假若$\psi(s)\not\equiv 0$，$(0<s\leqslant 1)$．则存在$0<s_0<1$， 使$\psi(s_0)\neq 0$．于是存在有$\varepsilon>0$，使$s_0>\varepsilon$，$1-s_0>\varepsilon$，及当$|s-s_0|<\varepsilon$时，有

$$\psi(s)\psi(s_0)>0.$$

作在[0,1]上的连续函数$f(s)$：在$|s-s_0|\geqslant\varepsilon$上为0，在$|s-s_0|<\varepsilon$上为正．于是

$$\int_0^1 f(s)\psi(s)ds=\int_{s_0-\varepsilon}^{s_0+\varepsilon} f(s)\psi(s)ds\neq 0.$$

但这与(16)矛盾．所以(14)必成立．定理证毕．

定理2 设$\varphi(t)$是[0，∞)上的有界连续函数及

$$f(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(t)dt,\ (\lambda>0).$$

若$f(\lambda)$ $(0<\lambda<\infty)$ 是完全单调函数，则

$$\varphi(t)\geqslant 0.$$

证 [5]中定理4.4.1说：若$\varphi(t)$是[0，∞) 上的有界连续

函数及

$$f(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(t)dt,$$

则 $$\varphi(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{t}\right)^{n+1}f^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right).$$

于是，由$f(\lambda)$是完全单调函数立知$\varphi(t)\geqslant 0$。定理证毕。

定理3 若$f(x)$在$(0,\infty)$上有一切阶导数，且存在正常数M，使

$$|f^{(k)}(x)|<\frac{Mk!}{x^{k+1}},\quad (k=0,1,\cdots;0<x<+\infty),$$

则

$$f(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(t)dt,$$

其中，$\varphi(t)$在$(0,\infty)$上有界。反之亦然。

这个定理是[6，第七章，定理16a]。在那里给出了完整的证明，读者可以参考。

第11章

$\overline{B\cup F}$型Q过程的存在和唯一性准则*)

§1 引言和定理的陈述

在前面，我们从一切Q过程中划分出B型和F型两类最重要的Q过程。但有时除这两类Q过程外，还有一类最重要的Q过程存在，那就是既不是B型Q过程也不是F型Q过程，我们称之调$\overline{B\cup F}$型Q过程。显然，B型、F型和$\overline{B\cup F}$型Q过程并起来就是全部Q过程，因此，如果我们能够把这三类Q过程研究清楚，那么Q过程中的问题也就很容易弄清了。例如，在本章之末我们将可看出，Q过程唯一性准则就是B型Q过程唯一性准则、F型Q过程唯一性准则和$\overline{B\cup F}$型Q过程存在准则的直接推论。所以这三种类型Q过程的研究十分重要。其中B型Q过程结构最简单，因此也易于研究；F型Q过程的结构较复杂，因而研究起来就较困难；$\overline{B\cup F}$型Q过程的结构甚复杂，因而研究起来就很困难。本章的目的是给出$\overline{B\cup F}$型Q过程的存在和唯一性准则。

定理1 设给任一个Q-矩阵，则

(I) 对于$\overline{B\cup F}$型Q过程，只有两种可能，或者不存在，或者有无穷多个；

*) 本书成稿后曾征求不少同志的意见，大都认为把作者和郭青峰同志在"Q-矩阵问题定性理论"方面的结果写入书中才好。应此，作者重新整理了这一工作的核心部分，用分析且初等的方法，写成一章，添加书末。

(II) 若 Q 保守，则$\overline{BUF}$型Q过程不存在；

(III) 若Q非保守，则 $\overline{BUF}$ 型Q过程不存在的充要条件是下列两条同时成立：

(i) $\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)=c(\lambda)>0,\ 0<\lambda<+\infty;$ (1)

(ii) $\sum_{j\in E}\left(q_j-\sum_{k\neq j}q_{jk}\right)\eta_j(\lambda)<+\infty,\ 0<\lambda<+\infty,$ (2)

其中$\eta(\lambda)=(\eta_0(\lambda),\ \eta_1(\lambda),\ \cdots)$是方程

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\eta(\lambda)-\eta(\lambda)Q=0_-,\ \lambda>0\\ 0_-\leqslant\eta(\lambda),\ \eta(\lambda)1<+\infty\\ \eta(\lambda)-\eta(\mu)+(\lambda-\mu)\cdot\eta(\mu)\Phi(\lambda)=0_-\end{array}\right\}\quad(3)$$

的任一解。

(IV) (III)中条件 (i) 成立的充要条件是下列两条同时成立：

(i)′ $\inf_{i\in\dot{E}}\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)>0\ (0<\lambda<+\infty),$ (4)

其中 $\dot{E}=\left(i:\sum_{j\in E}q_{ij}<0\right)$。

(i)″ 方程

$$\left.\begin{array}{l}\lambda U-QU=0_1,\ \lambda>0\\ 0_1\leqslant U\leqslant 1\end{array}\right\}\quad(5)$$

只有零解。

而(III)中条件(ii)可用下列条件代替：

(ii)′ $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\sum_{j\in E}\eta_j(\lambda)<+\infty。$ (6)

§2 若干引理

如§5.1，令

$$A(\mu,\ \lambda)=1+(\mu-\lambda)\Phi(\lambda),\ (\lambda,\ \mu>0)。\qquad (1)$$

引理1 行矢量$\eta(\lambda)$满足

$$\eta(\lambda)1<+\infty \qquad (2)$$

及
$$\eta(\lambda)=\eta(\mu)A(\mu,\lambda),\ (\lambda,\mu>0) \qquad (3)$$

的充要条件是$\eta(\lambda)$有如下表现：

$$\eta(\lambda)=\alpha\Phi(\lambda)+\bar{\eta}(\lambda), \qquad (4)$$

其中$\alpha\geqslant 0_-$与λ无关，$\alpha\Phi(\lambda)1<+\infty$，$\bar{\eta}(\lambda)$满足

$$\bar{\eta}(\lambda)\geqslant 0_-,\ \bar{\eta}(\lambda)1<+\infty,\ \bar{\eta}(\lambda)=\bar{\eta}(\mu)A(\mu,\lambda) \qquad (5)$$

和
$$\eta(\lambda)(\lambda I-Q)=0_- \qquad (6)$$

而α，从而$\bar{\eta}(\lambda)$由$\eta(\lambda)$唯一决定：

$$\eta(\lambda)(\lambda I-Q)=\alpha, \qquad (7)$$

$$\eta(\lambda)\downarrow 0_-,\ \lambda\eta(\lambda)\to\alpha\ (\lambda\uparrow\infty)。\qquad (8)$$

证 由(4.2.18)知

$$\Phi(\lambda)(\lambda I-Q)=I。\qquad (9)$$

在(3)的两端右乘以算子$(\lambda I-Q)$得

$$\begin{aligned}\eta(\lambda)(\lambda I-Q)&=\eta(\mu)A(\mu,\lambda)(\lambda I-Q)\\&=\eta(\mu)\{I+(\mu-\lambda)\Phi(\lambda)\}(\lambda I-Q)\\&=\eta(\mu)\{\lambda I-Q+(\mu-\lambda)\Phi(\lambda)(\lambda I-Q)\}\\&=\eta(\mu)\{\lambda I-Q+(\mu-\lambda)I\}\\&=\eta(\mu)(\mu I-Q),\end{aligned} \qquad (10)$$

故(7)成立。其中α与λ无关，且由$\eta(\lambda)$唯一决定。由引理5.1.1知$\eta(\lambda)\downarrow 0_-$。于是由(7)知$\lambda\eta(\lambda)\to\alpha\geqslant 0_-$。由(a)得

$$\alpha\Phi(\lambda)(\lambda I-Q)=\alpha。\qquad (11)$$

由(7)和定理4.2.5得

$$\eta(\lambda)\geqslant\alpha\Phi(\lambda)。\qquad (12)$$

由(11)得

$$\alpha\Phi(\lambda)(\lambda I-Q)=\alpha \tag{13}$$

故
$$\bar{\eta}(\lambda)=\eta(\lambda)-\alpha\Phi(\lambda)\geqslant 0_-, \tag{14}$$

$$\bar{\eta}(\lambda)(\lambda I-Q)=0_-. \tag{15}$$

由$\eta(\lambda)1<+\infty$和(14)得

$$\alpha\Phi(\lambda)1<+\infty,\quad \bar{\eta}(\lambda)<+\infty. \tag{16}$$

由(16)和定理4.4.4知

$$\alpha\Phi(\lambda)=\alpha\Phi(\mu)A(\mu,\lambda). \tag{17}$$

由(3)和(17)得

$$\bar{\eta}(\lambda)=\bar{\eta}(\mu)A(\mu,\lambda). \tag{18}$$

至此引理得证。

引理2 设$\eta(\lambda)=(\eta_0(\lambda),\eta_1(\lambda),\cdots)$是(1.3)的任一解，则对一切$\mu>0$有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\sum_{j\in E}\eta_j(\lambda)\geqslant\mu\sum_{j\in E}\eta_j(\mu)+\sum_{j\in E}\Big(q_j-\sum_{k\neq j}q_{jk}\Big)\eta_j(\mu). \tag{19}$$

从而若对某个μ有

$$\sum_{j\in E}\Big(q_j-\sum_{k\neq j}q_{jk}\Big)\eta_j(\mu)=+\infty. \tag{20}$$

则有
$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\sum_{j\in E}\eta_j(\lambda)=+\infty. \tag{21}$$

证 由
$$\eta(\lambda)-\eta(\mu)+(\lambda-\mu)\eta(\mu)\Phi(\lambda)=0_- \tag{22}$$

知
$$\lambda\sum_{j\in E}\eta_j(\lambda)$$

$$=\lambda\sum_{j\in E}\eta_j(\mu)+(\mu-\lambda)\sum_{i\in E}\eta_i(\mu)\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)$$

$$=\lambda\sum_{j\in E}\eta_j(\mu)+(\mu-\lambda)\sum_{i\in E}\eta_i(\mu)(1-z_i(\lambda))$$

$$=\mu\sum_{j\in E}\eta_j(\mu)+(\lambda-\mu)\sum_{i\in E}\eta_i(\mu)z_i(\lambda)$$

$$=\mu\sum_{j\in E}\eta_j(\mu)+\sum_{i\in E}\eta_i(\mu)\lambda z_i(\lambda)-\mu\sum_{i\in E}\eta_i(\mu)z_i(\lambda)。\tag{23}$$

由(23)、定理4.4.1和定理4.4.2立得所欲证。

引理3 设$\Phi(\lambda)=(\varphi_{ij}(\lambda))$为任一$Q$过程，$f_i\geqslant 0$，$\sup\limits_i f_i=f<\infty$，则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{j\in E}\lambda\varphi_{ij}(\lambda)f_j=f_i\tag{24}$$

证 由定理4.4.1知

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{j\neq i}\lambda\varphi_{ij}(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{j\in E}\lambda\varphi_{ij}(\lambda)-\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\varphi_{ii}(\lambda)$$

$$=1-1=0。\tag{25}$$

由定理10.2.5得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{j\in E}\lambda\varphi_{ij}(\lambda)f_j\geqslant\sum_{j\in E}\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\varphi_{ij}(\lambda)f_j$$

$$=\sum_{j\in E}\delta_{ij}f_j=f_i。\tag{26}$$

$$\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)f_j=\lambda\varphi_{ii}(\lambda)f_i+\sum_{j\neq i}\lambda\varphi_{ij}(\lambda)f_j$$

$$\leqslant\lambda\varphi_{ii}(\lambda)f_i+f\sum_{j\neq i}\lambda\varphi_{ij}(\lambda)。\tag{27}$$

由(25)和(27)得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\sum\varphi_{ij}(\lambda)f_j\geqslant\lim_{\lambda\to\infty}\varphi_{ii}(\lambda)f_i+f\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{j\neq i}\lambda\varphi_{ij}(\lambda)$$

$$=f_i+f\cdot 0=f_i。\tag{28}$$

由(26)和(28)立得(24)。引理证毕。

引理4 设$R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda);i,j\in E)$是任一$Q$过程，则

$$0\leqslant\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)-\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\Big(\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{kj}(\lambda)\Big)-\frac{\lambda}{\lambda+q_i}$$

$$\leqslant\frac{q_i-\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}}{\lambda+q_i},\quad(\lambda>0,\ i\in E)。\tag{29}$$

证 由定理4.2.1立得(29)的左半部分。为证(29)的右半部分，只需证

$$\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\leqslant\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\Big(\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{kj}(\lambda)$$

$$-\frac{\lambda+q_i-\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}}{\lambda+q_i}\Big)。\tag{30}$$

即

$$1-\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\geqslant-\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\Big(\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{kj}(\lambda)\Big)+\frac{\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}}{\lambda+q_i}。\tag{31}$$

即

$$\lambda\Big(1-\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\Big)\geqslant\sum_{k\neq i}q_{ik}\Big(1-\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{kj}(\lambda)\Big)$$

$$-q_i\Big(1-\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\Big)。\tag{32}$$

往证(32)。

由定理3.3.2得

$$\sum_{j\neq i}\gamma^2\varphi_{ij}(\gamma)\Big(1-\lambda\sum_{k\in E}\varphi_{jk}(\lambda)\Big)$$

$$+\gamma(\gamma\varphi_{ii}(\gamma)-1)\Big(1-\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\Big)$$

$$= \sum_{j\in E}\gamma^2\varphi_{ij}(\gamma)\left(1-\lambda\sum_{k\in E}\varphi_{jk}(\lambda)\right)-\gamma\left(1-\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\right)$$

$$=\gamma\left(\gamma\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\gamma)-1\right)-\lambda\gamma^2\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\gamma)\sum_{k\in E}\varphi_{jk}(\lambda)$$

$$+\gamma\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)$$

$$\leqslant\lambda\gamma\left(\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)-\gamma\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\gamma)\sum_{k\in E}\varphi_{jk}(\lambda)\right)$$

$$=\lambda\gamma\left(\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\gamma)-\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\gamma)\sum_{k\in E}\varphi_{jk}(\lambda)\right)$$

$$=\lambda\left(\gamma\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\gamma)-\lambda\sum_{j\in E}\gamma\varphi_{ij}(\gamma)\sum_{k\in E}\varphi_{jk}(\lambda)\right).$$

令$\gamma\to\infty$，由定理10.2.5及引理3得

$$\lambda\left(1-\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\right)$$

$$=\lim_{\gamma\to\infty}\lambda\left(\gamma\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\gamma)-\sum_{j\in E}\gamma\varphi_{ij}(\gamma)\lambda\sum_{k\in E}\varphi_{jk}(\lambda)\right)$$

$$\geqslant\lim_{\gamma\to\infty}\sum_{j\neq i}\gamma^2\varphi_{ij}(\gamma)\left(1-\lambda\sum_{k\in E}\varphi_{jk}(\lambda)\right)$$

$$+\lim_{\gamma\to\infty}\gamma(\gamma\varphi_{ii}(\gamma)-1)\left(1-\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\right)$$

$$\geqslant\sum_{j\neq i}q_{ij}\left(1-\lambda\sum_{k\in E}\varphi_{jk}(\lambda)\right)-q_i\left(1-\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\right).$$

于是（32）成立。从而引理得证。

§3 定理的证明

引理1 若Q非保守，且定理1.1中的条件(i)不成立，则存在无穷多个$\overline{B\cup F}$型Q过程。

证 若定理1.1中的条件(i)不成立，于是由定理4.4.7知，存在与λ无关的行矢量$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha(0),\alpha_1(1),\cdots)>\mathbf{0}_-$，使$\alpha R(\lambda)>\mathbf{0}_-$ $(0<\lambda<+\infty)$，而$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{1}<+\infty$得知

$$\frac{\left(-\sum_{j\in E}q_{ij}\right)\alpha_j}{\sum_{k\in E}\alpha_k}=0\ \ (i,\ j\in E). \tag{1}$$

于是，由§7.2知

$$R(\lambda)=\Phi(\lambda)+\frac{(1-\lambda\Phi(\lambda)1)}{\lambda\alpha\Phi(\lambda)1}\cdot\alpha\Phi(\lambda) \tag{2}$$

是一个Q过程。

现在证明，由（2）确定的Q过程不是B型Q过程．为此，只需证明

$$R(\lambda)-QR(\lambda)-I\neq 0, \tag{3}$$

其中I是单位矩阵．事实上

$$\lambda R(\lambda)-QR(\lambda)-I=\lambda\left(\Phi(\lambda)+\frac{1-\lambda\Phi(\lambda)1}{\lambda\alpha\Phi(\lambda)1}\cdot\alpha\Phi(\lambda)\right.$$

$$\left.-Q\left(\Phi(\lambda)+\frac{1-\lambda\Phi(\lambda)1}{\lambda\alpha\Phi(\lambda)1}\alpha\Phi(\lambda)\right)-I\right.$$

$$=(\lambda\Phi(\lambda)-Q\Phi(\lambda)-I)+(\lambda(1-\Phi(\lambda)1)$$

$$-Q(1-\Phi(\lambda)1))\frac{\alpha\Phi(\lambda)}{\lambda\alpha\Phi(\lambda)1}. \tag{4}$$

由$\Phi(\lambda)$是B型Q过程，故

$$\lambda\Phi(\lambda)-Q\Phi(\lambda)-I=0. \tag{5}$$

而

$$\alpha\Phi(\lambda)>0_-, \tag{6}$$

$$\lambda\alpha\Phi(\lambda)1>0. \tag{7}$$

由定理1.1中的条件(i)知

$$1-\lambda\Phi(\lambda)1\neq 0_1. \tag{8}$$

由定理4.4.1的证明过程及Q非保守知

$$\lambda(1-\lambda\Phi(\lambda)1)-Q(1-\lambda\Phi(\lambda)1)=\begin{pmatrix}-\sum_{j\in E}q_{0j}\\ -\sum_{j\in E}q_{1j}\\ \vdots\end{pmatrix}\neq 0_1. \tag{9}$$

由(4)—(9)知(3)成立。故$R(\lambda)$不是B型Q过程。

现在证明$R(\lambda)$也不是F型Q过程。为此，只需证明

$$\lambda R(\lambda)-R(\lambda)Q-I\neq 0. \tag{10}$$

事实上

$$\lambda R(\lambda)-R(\lambda)-I=\lambda\left(\Phi(\lambda)+\frac{1-\lambda\Phi(\lambda)1}{\lambda\alpha\Phi(\lambda)1}\cdot\alpha\Phi(\lambda)\right)$$

$$-\left(\Phi(\lambda)+\frac{1-\lambda\Phi(\lambda)1}{\lambda\alpha\Phi(\lambda)1}\alpha\Phi(\lambda)\right)Q-I$$

$$=(\lambda\Phi(\lambda)-\Phi(\lambda)Q-I)$$

$$+\frac{1-\lambda R(\lambda)1}{\lambda\alpha\Phi(\lambda)1}\cdot$$

$$\cdot\alpha(\lambda\Phi(\lambda)-\Phi(\lambda)Q). \tag{11}$$

因$\Phi(\lambda)$是F型Q过程，所以

$$\lambda\Phi(\lambda)-\Phi(\lambda)Q-I=0. \tag{12}$$

由 (11) 和 (12) 得

$$\lambda R(\lambda)-R(\lambda)Q-I=\frac{(1-\lambda\Phi(\lambda)1)\alpha}{\lambda\alpha\Phi(\lambda)1}. \tag{13}$$

由(7)、(8) 以及 (13) 和$\alpha>0$立得 (10)。所以$R(\lambda)$ 也不是F型Q过程。

至此，我们得知，由 (2)确定的Q过程$R(\lambda)$是$\overline{B\cup F}$型Q 过程。

令

$$\alpha_i^{(n)}=\begin{cases}\alpha_0+2^{-(n+1)}, & i=0;\\ \alpha_i, & i\neq 0.\end{cases} \tag{14}$$

$$\alpha^{(n)}=(\alpha_0^{(n)},\alpha_1^{(n)},\ \cdots),\ (n=0,\ 1,\cdots). \tag{15}$$

于是，由上述论证知，对任一自然数n

$$R^{(n)}(\lambda)=\Phi(\lambda)+\frac{1-\lambda\Phi(\lambda)1}{\lambda\alpha^{(n)}\Phi(\lambda)1}\cdot\alpha^{(n)}\Phi(\lambda) \tag{16}$$

是一个$\overline{B\cup F}$型Q过程。

下面来证明这些Q过程彼此都不相同。 假设存在正整数n，m使

$$R^{(n)}(\lambda)=R^{(m)}(\lambda)\qquad (n\neq m). \tag{17}$$

于是有 $$\frac{\alpha^{(n)}\Phi(\lambda)}{\lambda\alpha^{(n)}\Phi(\lambda)1}=\frac{\alpha^{(m)}\Phi(\lambda)}{\lambda\alpha^{(m)}\Phi(\lambda)1}. \tag{18}$$

两端右乘以$(\lambda I-Q)$，注意(5)得

$$\frac{\alpha^{(n)}}{\lambda\alpha^{(n)}\Phi(\lambda)1}=\frac{\alpha^{(m)}}{\lambda\alpha^{(m)}\Phi(\lambda)1}. \tag{19}$$

令 $$\frac{\alpha^{(n)}\Phi(\lambda)1}{\alpha^{(m)}\Phi(\lambda)1}=r, \tag{20}$$

于是 $$\alpha^{(n)}=r\alpha^{(m)}. \tag{21}$$

这与(14)矛盾。故(17)不可能成立。所以$R^{(n)}(\lambda)$ 是无穷多个彼此不同的$\overline{B\cup F}$型Q过程。

引理2 若Q非保守，且定理1中的条件(ii)′ 不成立，则存在无穷多个$\overline{B\cup F}$型Q过程。

证 由条件(ii)′不成立知，在(1.3) 的一切解中至少存在

一个解$\eta(\lambda)=(\eta_0(\lambda), \eta_1(\lambda), \cdots)$使

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\sum_{j\in B}\eta_j(\lambda)=+\infty。\tag{22}$$

任选一行矢量$\alpha=(\alpha_0, \alpha_1, \cdots)>0$，使$\alpha\Phi(\lambda)$可和（这总能办得到，如选$\alpha_i=2^{-(i+1)}$，$(i\in E)$。由（22）知

$$\frac{\left(-\sum_{k\in E}q_{ik}\right)\alpha_j}{\sum_{k\in E}\alpha_k+\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\sum_{k\in E}\eta_k(\lambda)}=0, \ (i, j\in E)。\tag{23}$$

令
$$R(\lambda)=\Phi(\lambda)+\frac{(1-\lambda\Phi(\lambda)1)}{\lambda(\alpha\Phi(\lambda)+\eta(\lambda))1}(\alpha\Phi(\lambda)+\eta(\lambda))。\tag{24}$$

参看§7.2易知$R(\lambda)$是一个Q过程。再参看引理1的证明，易完成本引理的证明。

引理3 若Q非保守且定理1.1中条件（ii）不成立，则存在无穷多个$\overline{B\cup F}$型Q过程。

证 由引理2.2和引理2立得我们的引理

引理4 设Q非保守。若定理1.1中的条件(i) 和(ii)同时成立，则一切Q过程是F型的．从而都不是$\overline{B\cup F}$型的。

证 设$R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda); i, j\in E)$是任一$Q$过程。令

$$r_{ij}(\lambda)-\varphi_{ij}(\lambda)=x_{ij}, \ (i, j\in E)。\tag{1}$$

由定理4.2.1知

$$r_{ij}(\lambda)\geqslant\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}r_{kj}(\lambda)+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}。\tag{2}$$

由定理4.2.2知

$$\varphi_{ij}(\lambda)=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\varphi_{kj}(\lambda)+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}。\tag{3}$$

由（1）、（2）、（3）及$\varphi_{ij}(\lambda)$的最小性得

$$0\leqslant x_{ij}=r_{ij}(\lambda)-\varphi_{ij}(\lambda)\leqslant r_{ij}(\lambda)+\varphi_{ij}(\lambda)\leqslant\frac{2}{\lambda}。\quad(4)$$

$$x_{ij}\geqslant\sum_{k\neq i}\frac{q_k}{\lambda+q_i}x_{kj}。\quad(5)$$

于是对于固定的$j\in E$和λ，有

$$X_j\in m,\quad(6)$$

$$(\lambda I-Q)X_j\geqslant 0,\quad(7)$$

其中 $X_j=\begin{pmatrix}x_{0j}\\x_{1j}\\x_{2j}\\\vdots\end{pmatrix}$。

由条件(i)，定理4.4.8以及定理4.2.4知，对固定的$j\in E$，$\lambda>0$

存在列矢量$\begin{pmatrix}f_j^{(0)}(\lambda)\\f_j^{(1)}(\lambda)\\\vdots\end{pmatrix}$使$f_j^{(a)}(\lambda)\geqslant 0$ $(\lambda>0,\ a\in E)$

$$x_{ij}(\lambda)=\sum_{a\in E}\varphi_{ia}(\lambda)f_j^{(a)}(\lambda)\quad(\lambda>0,\ i\in E)。\quad(8)$$

于是 $$r_{ij}(\lambda)=\varphi_{ij}(\lambda)+\sum_{a\in E}\varphi_{ia}(\lambda)f_j^{(a)}(\lambda),$$

$$f_j^{(a)}(\lambda)\geqslant 0,\ (\lambda>0;\ i,\ j,\ a\in E)。\quad(9)$$

由定理3.3.2知，$R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda);\ i,\ j\in E)$ 必须满足

$$R(\lambda)\geqslant 0\quad(\lambda>0);\quad(10)$$

$$\lambda R(\lambda)1\leqslant 1\quad(\lambda>0);\quad(11)$$

$$R(\lambda)-R(\mu)+(\lambda-\mu)R(\lambda)R(\mu)=0;\quad(12)$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda R(\lambda)-I)=Q,\quad(13)$$

其中0和1分别表示零矩阵和单位矩阵，$\mathbf{1}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\end{pmatrix}$。由(9)得

$$\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda)=(f_0^{(a)}(\lambda),f_1^{(a)}(\lambda),\cdots)\geqslant\mathbf{0}_-,(\lambda>0,a\in E). \quad (14)$$

若$\boldsymbol{\rho}=(\rho(0),\ \rho(1),\ \cdots)$为一行矢量，$\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}c(0)\\c(1)\\\vdots\end{pmatrix}$表示列矢量，则令

$$[\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{c}]=\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{c}=\sum_{i\in E}\rho(i)c(i). \quad (15)$$

$[\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{c}]$叫做行矢量$\boldsymbol{\rho}$和列矢量$\boldsymbol{c}$的内积．由（11）得

$$\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)+\lambda\sum_{a\in E}\varphi_{ia}(\lambda)[\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda),\mathbf{1}]\leqslant 1,(i\in E). \quad (16)$$

由$p_{aa}(t)\geqslant 0$，$\lim\limits_{t\to 0}p_{aa}(t)=1$知

$$\lambda\varphi_{aa}(\lambda)>0,\ (\lambda>0,\ a\in E). \quad (17)$$

由（16）和（17）得

$$[\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda),\ \mathbf{1}]<+\infty,\ (\lambda>0,a\in E). \quad (18)$$

令

$$\boldsymbol{\Phi}^{(a)}(\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_{0a}(\lambda)\\\varphi_{1a}(\lambda)\\\vdots\end{pmatrix}, \quad (19)$$

由$\Phi(\lambda)$为Q过程及定理3.3.2得

$$\Phi(\lambda)-\Phi(\mu)+(\lambda-\mu)\Phi(\lambda)\Phi(\mu)$$
$$=0,(\lambda,\mu>0;a\in E). \quad (20)$$

即

$$\boldsymbol{\Phi}^{(a)}(\lambda)-\boldsymbol{\Phi}^{(a)}(\mu)+(\lambda-\mu)\boldsymbol{\Phi}^{(a)}(\lambda)\boldsymbol{\Phi}^{(a)}(\mu)=0_1,$$
$$(\lambda,\ \mu>0;\ a\in E). \quad (21)$$

如§5.1，令

$$A(\mu,\ \lambda)=I+(\mu-\lambda)\Phi(\lambda),\ (\lambda,\mu>0). \quad (22)$$

于是由（20）得

$$A(\mu,\ \gamma)A(\gamma,\ \lambda)=A(\mu,\ \lambda)。\tag{23}$$

$$A(\mu,\ \lambda)\Phi(\mu)=\Phi(\lambda)。\tag{24}$$

即
$$A(\mu,\ \lambda)\Phi^{(a)}(\mu)=\Phi^{(a)}(\lambda),\ (a\in E)。\tag{25}$$

把（9）代入（12），并注意定理4.4.9得

$$\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda)A(\lambda,\mu)$$

$$=\boldsymbol{F}^{(a)}(\mu)+(\mu-\lambda)\sum_{t\in E}[\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda),\Phi^{(t)}(\mu)]\boldsymbol{F}^{(t)}(\mu).\tag{26}$$

由（14）和（22）知，当$\lambda\geqslant\mu>0$时，$\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda)A(\lambda,\ \mu)\geqslant\mathbf{0}_-$；由（26）知，当$\mu\geqslant\lambda>0$时，$\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda)A(\lambda,\ \mu)\geqslant\mathbf{0}_-$。所以

$$\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda)A(\lambda,\mu)\geqslant\mathbf{0}_-,\ (\lambda,\ \mu>0)。\tag{27}$$

由（26）得

$$[\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda)A(\lambda,\ \mu),\ 1]=[\boldsymbol{F}^{(a)}(\mu),\ 1]$$

$$+(\mu-\lambda)\sum_{t\in E}[\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda),\ \Phi^{(t)}(\mu)][\boldsymbol{F}^{(t)}(\mu),1].\tag{28}$$

由（9）得

$$R(\mu)\mathbf{1}=\Phi(\mu)\mathbf{1}+\sum_{t\in E}\Phi^{(t)}(\mu)[\boldsymbol{F}^{(t)}(\mu),\ \mathbf{1}].\tag{29}$$

故

$$[\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda),\ R(\mu)\mathbf{1}]=[\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda),\ \Phi(\mu)\mathbf{1}]$$

$$+\sum_{t\in E}[\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda),\Phi^{(t)}(\mu)][\boldsymbol{F}^{(t)}(\mu),\mathbf{1}]。\tag{30}$$

但由（11）和（18）知

$$[\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda),R(\mu)\mathbf{1}]=\frac{1}{\mu}[\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda),\ \mu R(\mu)\mathbf{1}]$$

$$\leqslant\frac{1}{\mu}[\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda),\mathbf{1}]<+\infty,\ (n>0)。\tag{31}$$

由（30）和（31）知

$$\sum_{t\in E}[\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda),\Phi^{(t)}(\mu)][\boldsymbol{F}^{(t)}(\mu),1]<+\infty. \quad (32)$$

由（18）、（28）和（32）得

$$[\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda)A(\lambda,\ \mu),\ 1]<+\infty. \quad (33)$$

即$F^{(a)}(\lambda)A(\lambda,\ \mu)$可和．今暂固定$a$和$\lambda>0$，而令

$$\rho(\mu)=\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda)A(\lambda,\mu),\ (\mu>0). \quad (34)$$

于是由（27）和（33）知，$\rho(\mu)\geqslant 0_-$且可和，并且由（23）知

$$\rho(\mu)A(\mu,\ \gamma)=\rho(\gamma),\ (\mu,\ \gamma>0). \quad (35)$$

于是由引理2.1知，存在与μ无关（但与a和λ有关）的行矢量$\beta^{(a)}(\lambda)\geqslant 0_-$，使

$$[\beta^{(a)}(\lambda)\Phi(\mu),\ 1]<+\infty \quad (36)$$

$$\mu\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda)A(\lambda,\ \mu)-\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda)A(\lambda,\ \mu)=\beta^{(a)}(\lambda) \quad (37)$$

$$\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda)A(\lambda,\ \mu)=\beta^{(a)}(\lambda)\Phi(\mu)+\bar{\rho}^{(a,\lambda)}(\mu) \quad (38)$$

并且对固定的a和λ，$\bar{\rho}_0^{(a,\lambda)}(\mu)=(\bar{\rho}_0^{(a,\lambda)}(\mu),\ \bar{\rho}_1^{(a,\lambda)}(\mu),\cdots)$是方程

$$\left.\begin{array}{l}\mu\rho(\mu)-\rho(\mu)Q=0_-,\ \mu>0\\ 0\leqslant\rho(\mu),\ \rho(\mu)1<+\infty\\ \rho(\mu)-\rho(\gamma)+(\mu-\gamma)\rho(\gamma)\Phi(\mu)=0_-\end{array}\right\} \quad (39)$$

的解．由（36）、（37）和（38），特别取$\mu=\lambda$得

$$[\beta^{(a)}(\lambda)\Phi(\lambda),\ 1]<+\infty,\ (\lambda>0,\ a\in E). \quad (40)$$

$$\lambda\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda)-\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda)Q=\beta^{(a)}(\lambda),\ (\lambda>0,\ a\in E). \quad (41)$$

$$\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda)=\beta^{(a)}(\lambda)\Phi(\lambda)+\bar{\rho}^{(a,\lambda)}(\lambda),\ (\lambda>0,a\in E). \quad (42)$$

在（26）的两端右乘以$(\mu I-Q)$，由（39）和（43）得

$$\beta^{(a)}(\lambda)=\beta^{(a)}(\mu)+(\mu-\lambda)$$

$$\cdot\sum_{i\in E}[\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda),\Phi^{(i)}(\mu)]\beta^{(i)}(\mu)。\qquad(43)$$

由（9）、定理2.2.2和定理4.2.2知，$\left(\lambda\sum_{j\in E}r_{ij}(\lambda);\ i\in E\right)$是非负线性方程组

$$x_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}x_k+\frac{\lambda}{\lambda+q_i}+\frac{\lambda[\boldsymbol{F}^{(i)}(\lambda),1]}{\lambda+q_i},\quad(i\in E)$$

$$(44)$$

的最小非负解，从而

$$\lambda\sum_{j\in E}r_{ij}(\lambda)-\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\left(\lambda\sum_{j\in E}r_{kj}(\lambda)\right)-\frac{\lambda}{\lambda+q_i}$$

$$=\frac{\lambda[\boldsymbol{F}^{(i)}(\lambda),1]}{\lambda+q_i},\ (i\in E)\qquad(45)$$

于是由引理2.4得

$$[\boldsymbol{F}^{(i)}(\lambda),1]\leqslant\frac{q_i-\sum_{j\neq i}q_{ij}}{\lambda}<+\infty(\lambda>0,i\in E).(46)$$

于是由(42)及定理1·1中的条件(i)得

$$q_a-\sum_{j\neq a}q_{aj}\geqslant\lambda[\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda),1]$$

$$=\lambda[\beta^{(a)}(\lambda)\Phi(\lambda)+\overline{\rho}^{(a,x)}(\lambda),1]$$
$$\geqslant[\lambda\beta^{(a)}(\lambda)\Phi(\lambda),1]$$
$$=[\beta^{(a)}(\lambda),\lambda\Phi(\lambda)1]$$
$$\geqslant\eta(\lambda)[\beta^{(a)}(\lambda),1]。\qquad(47)$$

所以 $[\beta^{(a)}(\lambda),1]\dfrac{\lambda[\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda),1]}{c(\lambda)}\leqslant\dfrac{q_a-\sum_{j\neq a}q_{aj}}{c(\lambda)}<+\infty$，

$$(\lambda>0,\ a\in E)。\qquad (48)$$

由（43）得

$$[\beta^{(a)}(\lambda),1]-[\beta^{(a)}(\mu),\ 1]+(\mu-\lambda)\sum_{i\in E}[\boldsymbol{F}^{(a)}(\lambda),\Phi^{(i)}(\mu)]$$

$$\cdot[\beta^{(i)}(\mu),1]。\qquad (49)$$

由(a)及$R(\lambda)$和$\Phi(\lambda)$都满足(13)得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\varphi_{ia}(\lambda)\lambda f_j^{(a)}(\lambda)=0,\ (i,j\in E;\ a\in E)。\qquad (50)$$

特别 $$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\varphi_{aa}(\lambda)\lambda f_j^{(a)}(\lambda)=0 \qquad (51)$$

但 $$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\varphi_{aa}(\lambda)=1, \qquad (52)$$

故 $$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda f_j^{(a)}(\lambda)=0, \qquad (53)$$

特别 $$\lim_{\lambda\to\infty} f_j^{(a)}(\lambda)=0。\qquad (54)$$

由(41)得

$$\lambda f_j^{(a)}(\lambda)+q_j f_j^{(a)}(\lambda)=\sum_{i\neq j} f_i^{(a)}(\lambda)q_{ij}+\beta_j^{(a)}(\lambda)。\qquad (55)$$

由(43)知，当μ增加时，$\beta^{(a)}(\mu)$不增。又由(42)、(43)及(44)得

$$\beta^{(a)}(\lambda)\downarrow 0;\ (\lambda\uparrow+\infty)。\qquad (56)$$

从而有 $$[\beta^{(a)}(\lambda),\ 1]\downarrow 0\quad(\lambda\uparrow+\infty)。\qquad (57)$$

由(10)和(11)得

$$[\beta^{(a)}(\lambda),\Phi^{(i)}(\mu)]\leqslant\frac{1}{\mu}[\beta^{(a)}(\lambda),1]<+\infty$$

$$(\lambda,\mu>0)。\qquad (58)$$

$$\sup_{i\in E}|\gamma_{ii}(\lambda)-\varphi_{ii}(\mu)|\leqslant\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}<+\infty,\ (\lambda,\mu>0)。\qquad (59)$$

由(58)、(59)及(22)得

$$(\mu-\lambda)[\beta^{(a)}(\lambda)\Phi(\lambda),\Phi^{(t)}(\mu)]$$
$$=[\beta^{(a)}(\lambda),(\mu-\lambda)\Phi(\lambda)\Phi^{(t)}(\mu)]$$
$$=[\beta^{(a)}(\lambda),\Phi^{(t)}(\lambda)-\Phi^{(t)}(\mu)]$$
$$=[\beta^{(a)}(\lambda),\Phi^{(t)}(\lambda)]-[\beta^{(a)}(\lambda),\Phi^{(t)}(\mu)]。\quad(60)$$

由(16)、(48)和定理1.1中的条件(i)得

$$1\geqslant\mu\Phi(\mu)1+\sum_{t\in E}\mu[\boldsymbol{F}^{(t)}(\mu),1]\Phi^{(t)}(\mu)$$
$$\geqslant c(\mu)1+\sum_{t\in E}c(\mu)[\beta^{(t)}(\mu),1]\Phi^{(t)}(\mu).\quad(61)$$

于是 $$\sum_{t\in E}[\beta^{(t)}(\mu),1]\Phi^{(t)}(\mu)\leqslant\left(\frac{1}{c(\mu)}-1\right)1,(\mu>0).\quad(62)$$

由(48)和(62)得

$$\sum_{t\in E}[\beta^{(a)}(\lambda),[\beta^{(t)}(\mu),1]\Phi^{(t)}(\mu)]$$
$$=\left[\beta^{(a)}(\lambda),\ \sum_{t\in E}[\beta^{(t)}(\mu),1]\Phi^{(t)}(\mu)\right]$$
$$\leqslant\left[\beta^{(a)}(\lambda),\ \left(\frac{1}{c(\mu)}-1\right)1\right]$$
$$=\left(\frac{1}{c(\mu)}-1\right)[\beta^{(a)}(\lambda),1]<+\infty.\quad(63)$$

由(60)和(63)得

$$(\mu-\lambda)\sum_{t\in E}[\beta^{(a)}(\lambda)\Phi(\lambda),\Phi^{(t)}(\mu)][\beta^{(t)}(\mu),1]$$
$$=\sum_{t\in E}[\beta^{(a)}(\lambda),\Phi^{(t)}(\lambda)][\beta^{(t)}(\mu),1]$$
$$-\sum_{t\in E}[\beta^{(a)}(\lambda),\Phi^{(t)}(\mu)][\beta^{(t)}(\mu),1]<+\infty。\quad(64)$$

由(50)和定理1.1的条件(ii)得

$$\sum_{i\in E}\overline{\rho}_i^{(a,\lambda)}(\mu)[\beta^{(i)}(\mu),1]$$

$$\leqslant\frac{1}{c(\mu)}\sum_{i\in E}\overline{\rho}_i^{(a,\lambda)}(\mu)\Big(q_i-\sum_{j\neq i}q_{ij}\Big)<+\infty. \quad (65)$$

由(39)和(65)得

$$(\mu-\lambda)\sum_{i\in E}\Big[\overline{\rho}^{(a,\lambda)}(\lambda),\Phi^{(i)}(\mu)\Big][\beta^{(i)}(\mu),1]$$

$$=\sum_{i\in E}(\mu-\lambda)\overline{\rho}^{(a,\lambda)}(\lambda)\Phi^{(i)}(\mu)[\beta^{(i)}(\mu),1]$$

$$=\sum_{i\in E}\Big(\overline{\rho}_i^{(a,\lambda)}(\lambda)-\overline{\rho}_i^{(a,\lambda)}(\mu)\Big)[\beta^{(i)}(\mu),1]$$

$$=\sum_{i\in E}\overline{\rho}_i^{(a,\lambda)}(\lambda)[\beta^{(i)}(\mu),1]-\sum_{i\in E}\overline{\rho}_i^{(a,\lambda)}(\mu)[\beta^{(i)}(\mu),1]$$

$$<+\infty \quad (66)$$

由(42)、(49)、(64)和(66)得

$$[\beta^{(a)}(\lambda),1]$$

$$=[\beta^{(a)}(\mu),1]+(\mu-\lambda)\sum_{i\in E}[\beta^{(a)}(\lambda)\Phi(\lambda),\Phi^{(i)}(\mu)]$$

$$[\beta^{(i)}(\mu),1]+(\mu-\lambda)\sum_{i\in E}[\overline{\rho}^{(a,\lambda)}(\lambda),\Phi^{(i)}(\mu)]$$

$$[\beta^{(i)}(\mu),1]$$

$$=[\beta^{(a)}(\mu),1]+\sum_{i\in E}[\beta^{(a)}(\lambda),\Phi^{(i)}(\lambda)][\beta^{(i)}(\mu),1]$$

$$-\sum_{i\in E}[\beta^{(a)}(\lambda),\Phi^{(i)}(\mu)][\beta^{(i)}(\mu),1]$$

$$+\sum_{i\in E}\overline{\rho}_i^{(a,\lambda)}(\lambda)[\beta^{(i)}(\mu),1]$$

$$-\sum_{i\in B}\overline{\rho}_i^{(a,\lambda)}(\mu)[\beta^{(i)}(\mu),1]<+\infty。\qquad(67)$$

由(39)知，

$$\overline{\rho}^{(a,\lambda)}(\mu)\downarrow\quad(\mu\uparrow+\infty)。\qquad(68)$$

由$\Phi^{(i)}(\mu)$的定义知

$$\Phi^{(i)}(\mu)\downarrow\quad(\mu\uparrow\infty)。\qquad(69)$$

由(57)、(67)、(68)和(69)得

$$[\beta^{(a)}(\lambda),1]\equiv0\ (\lambda>0,a\in E)。\qquad(70)$$

于是　$\beta^{(a)}(\lambda)\equiv0\quad(\lambda>0,a\in E)。\qquad(71)$

由(42)和(71)得

$$F^{(a)}(\lambda)=\overline{\rho}^{(a,\lambda)}(\lambda)\quad(\lambda>0,a\in E)。\qquad(73)$$

由(9)、(70)及(39)知$R(\lambda)$是F型Q过程。于是引理得证。

引理5　定理1.1中条件(i)成立的充要条件是定理11.1.1中的条件(i)′和(i)″同时成立。

证　注意定理11.1.1的证明过程立得我们的引理。

引理6　设Q非保守且定理1.1中的条件(i)成立，则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\sum_{j\in B}\eta_j(\lambda)<+\infty\qquad(74)$$

的充要条件是对一切$\mu>0$有

$$\sum_{j\in B}\Big(q_j-\sum_{k\neq j}q_{jk}\Big)\eta_j(\mu)<+\infty,\qquad(75)$$

有中$\eta(\lambda)=(\eta_0(\lambda),\ \eta_1(\lambda),\ \cdots\cdots)$是方程(1.3)的解。

证　由引理2·2知，若(74)成立，则(75)成立。反之，若定理1·1中的条件(i)和(75)成立，则由引理4知，不存在$\overline{B\cup F}$型Q过程。但由引理2知，(74)不成立时必存在$\overline{B\cup F}$型Q过程。因此，若定理1·1中的条件(i)和(75)都成立，则(74)亦必成立。于是，引理得证。

引理7 若Q保守，则不存在$\overline{B\cup F}$型Q过程。

证 周知，这时一切Q过程都是B型的。故不存在$\overline{B\cup F}$型Q过程。

定理1.1的证明：由引理1——引理7立得定理1.1。

§4 定理1.1的几个推论

系1 若Q非保守，且

$$\sup_{i\in E}\left(q_i-\sum_{j\neq i}q_{ij}\right)\leqslant c<+\infty, \tag{1}$$

则不存在$\overline{B\cup F}$型Q过程的充要条件是定理1.1中的条件(i)成立。

证 因为此时，对(1.3)的任一解有

$$\sum_{j\in E}\left(q_j-\sum_{k\neq j}q_{jk}\right)\eta_j(\lambda)\leqslant c\sum_{j\in E}\eta_j(\lambda)$$

$$<c\sum_{j\in E}\eta_j(\lambda)<+\infty。\tag{2}$$

所以定理1.1中的条件(ii)成立。于是，由定理1.1立得所欲证。

系2 若Q非保守，且

$$\sup_{i\in E}q_i\leqslant c<+\infty, \tag{3}$$

则$\overline{B\cup F}$型Q过程不存在的充要条件是B型Q过程唯一。

证 易证，若(3)成立，则(1.4)成立，于是由定理1.1以及

$$\sum_{j\in E}\eta_j(\lambda)\left(q_j-\sum_{k\neq j}q_{jk}\right)\leqslant\sum_{j\in E}\eta_j(\lambda)q_j$$

$$\leqslant c\sum_{j\in E}\eta_j(\lambda)\leqslant c\sum_{j\in E}\eta_j(\lambda)<+\infty \tag{4}$$

立得所欲证。这里$\eta(\lambda)=(\eta_0(\lambda),\eta_1(\lambda),\cdots\cdots)$是(1.3)的任一解.

系3 若Q非保守且E为有限集，则$\overline{B\cup F}$型Q过程不存在的充要条件是B型Q过程唯一

系4 若Q非保守且不存在$\overline{B\cup F}$型Q过程，则B型Q过程唯一。

由定理4.4.8、定理5.4.1和定理1.1立得

系5 设Q非保守。若$\overline{B\cup F}$型Q过程不存在，则B型Q过程唯一。

由系5立得

系6 若Q非保守且不存在$\overline{B\cup F}$型Q过程，则一切Q过程都是F型的。

系7 若Q为生灭Q-矩阵，则$\overline{B\cup F}$不存在的充要条件是

$R=\infty$。

§5 一切Q过程都是B型Q过程和一切Q过程都是F型Q过程的充要条件

对于已给的一个Q-矩阵，我们常希望一切Q过程都是B型Q过程，因为B型Q过程是一个微分方程组的解，较易把握。然而这种希望不是总能实现的。因此，我们自然会提出如下的问题：对于任给的一个Q-矩阵，一切Q过程都是B型Q过程的充要条件是什么？定理1.6.2给出了一个充分条件：它说若Q保守，则一切Q过程都是B型的。我们同样要问：一切Q过程都是F型Q过程的充要条件是什么？这二个问题应当说是十分困难的。但是在有了$\overline{B\cup F}$型Q过程的存在准则——定理1.1——之后（加上定理5.4.1和定理6.2.1），这两个问题的解答就十分容易了。本节的目的是给出上述二个问题的解答。

定理1 对于已给的一个Q-矩阵，一切Q过程都是B型Q过程的充要条件是Q保守或Q过程唯一。

证 由定理1.6.2，只需在Q非保守情况下证明这个定理。一切Q过程都是B型Q过程等价于F型Q过程唯一且$\overline{B\cup F}$型过程不存在。于是由定理6.2.1和定理1.1知，在Q为非保守时，一切过程都是B型Q过程等价于下列两条同时成立：

i) $\inf\limits_{i\in E}\lambda\sum\limits_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)>0$。 (1)

ii) 方程

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\eta-\eta Q=0_{-},\ \lambda>0\\ 0_{-}\leqslant\eta,\ \eta 1<+\infty\end{array}\right\}\qquad(2)$$

只有零解。故由定理7.1.1知，这等价于Q过程唯一。

定理2 对于已给的一个Q-矩阵，一切Q过程都是F型Q过程的充要条件是Q保守且Q过程唯一或Q非保守且$\overline{B\cup F}$型Q过程不存在。

证 设Q非保守。若一切Q过程都是F型的，则$\overline{B\cup F}$型Q过程存在；反之，若$\overline{B\cup F}$型Q过程不存在，则由系4.6知，一切Q过程都是F型的。于是定理在非保守情况下为真。

设Q保守。若Q过程唯一，则因这个唯一的Q过程就是最小Q过程且最小Q过程是F型的，所以一切Q过程都是F型的。反之，若Q过程非唯一，由定理1.6.2和Q保守知，一切Q过程都是B型的，从而B型Q过程非唯一。于是由定理5.4.1知，方程

$$\left.\begin{array}{l}\lambda U-QU=0_{1},\ \lambda>0\\ 0_{1}\leqslant U\leqslant 1\end{array}\right\}\qquad(3)$$

有非零解。由定理5.2.1知

$$R(\lambda)=\Phi(\lambda)+Z(\lambda)\frac{\alpha\Phi(\lambda)}{\lambda\alpha\Phi(\lambda)1}\qquad(4)$$

是一个异于$\Phi(\lambda)$的B型Q过程，其中$\alpha=(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \cdots\cdots)\geqslant 0_{-}$，

$\alpha\neq 0_-$，$\alpha 1=1$。用算子$(\lambda I-Q)$右乘(4)的两边得

$$R(\lambda)(\lambda I-Q)=\Phi(\lambda)(\lambda I-Q+\boldsymbol{Z}(\lambda)\frac{\alpha\Phi(\lambda)(\lambda I-Q)}{\lambda\alpha\Phi(\lambda)1}. \quad (5)$$

由$\Phi(\lambda)$是F型Q过程及定理3.5.1知

$$\Phi(\lambda)(\lambda I-Q)=I. \quad (6)$$

于是 $$\boldsymbol{Z}(\lambda)\frac{\alpha\Phi(\lambda)(\lambda I-Q)}{\lambda\alpha\Phi(\lambda)1}=\frac{\boldsymbol{Z}(\lambda)\alpha}{\lambda\alpha\Phi(\lambda)1}. \quad (7)$$

由Q保守及定理4.4.5知$Z(\lambda)\neq 0$。于是由$\alpha\neq 0$知

$$\frac{\boldsymbol{Z}(\lambda)\alpha}{\lambda\alpha\Phi(\lambda)1}\neq 0. \quad (8)$$

由(5)、(6)和(7)知

$$R(\lambda)(\lambda I-Q)\neq I. \quad (9)$$

于是由定理3.5.1知，$R(\lambda)$不是F型Q过程。故对于保守情况定理亦真。至此，定理证毕。

在结果本节时，我们顺便给出如下的

定理3 对于已给的一个Q-矩阵，除最小Q过程外，一切Q过程都是$\overline{B\cup F}$型Q过程的充要条件是Q保守且方程

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\boldsymbol{U}-Q\boldsymbol{U}=0_1,\ \lambda>0\\ 0_1\leqslant\boldsymbol{U}\leqslant 1\end{array}\right\} \quad (10)$$

只有零解或Q非保守且方程(10)和方程

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\eta-\eta Q=0_-\\ 0_-\leqslant\eta,\ \eta 1<+\infty\end{array}\right\} \quad (11)$$

只有零解。

证 除最小Q过程外，一切Q过程都是$\overline{B\cup F}$型Q过程等价于B型和F型Q过程都唯一。于是由定理1.6.2、定理5.4.1和定理6.2.1立得我们的定理。

§6 Q过程唯一性准则的新证明

定理7.1.1的新证明。

显然，Q过程唯一的充要条件是下列三条同时成立：

(A) B型Q过程唯一；

(B) F型Q过程唯一；

(C) $\overline{B\cup F}$型Q过程不存在。

于是由定理5.4.1、定理6.2.1 和定理1.1知，Q 过程唯一 的充要条件是下列条件同时成立：

A) 方程

$$\left.\begin{array}{l}\lambda \boldsymbol{U}-Q\boldsymbol{U}=\mathbf{0}_1,\ \ \lambda>0\\ \mathbf{0}_1\leqslant \boldsymbol{U}\leqslant 1\end{array}\right\}\qquad(1)$$

只有零解。

B) 最小Q过程诚实或方程

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\eta-\eta Q=\mathbf{0}_-,\ \ \lambda>0\\ \mathbf{0}_-\leqslant\eta,\ \ \eta\mathbf{1}<\infty\end{array}\right\}\qquad(2)$$

只有零解。

C) Q保守，或Q非保守且

(a) $\inf\limits_{i\in E}\lambda\sum\limits_{j\in B}\varphi_{ij}(\lambda)=\eta(\lambda)>0,\ \ 0<\lambda<+\infty$；

(b) $\sum\limits_{j\in E}\Big(q_j-\sum\limits_{k\neq j}q_{jk}\Big)\eta_j(\lambda)<+\infty,\ \ 0<\lambda<+\infty$，

其中$\eta(\lambda)=(\mu_0(\lambda),\eta_1(\lambda),\cdots)$是方程

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\eta(\lambda)-\eta(\lambda)Q=\mathbf{0}_-,\ \ \lambda>0\\ \mathbf{0}_-\leqslant\eta(\lambda),\eta(\lambda)\mathbf{1}<+\infty\\ \eta(\lambda)-\eta(\mu)+(\lambda-\mu)\eta(\mu)\Phi(\lambda)=\mathbf{0}_-\end{array}\right\}$$

的任一解。

由定理4.4.8知条件C)的(a)蕴含条件A)．显然，条件B)蕴含条件C)的(b)．所以Q过程唯一的充要条件是：条件C)的(a)和条件B)同时成立。

于是定理7.1.1得证。

参考文献

〔1〕 菲赫金哥尔茨，微积分学教程（中译本，叶彦谦等译），人民教育出版社，1956。

〔2〕 那汤松，实变函数论（中译本，徐瑞云译），人民教育出版社，1955。

〔3〕 杨宗磐，数学分析入门，科学出版社，1958。

〔4〕 夏道行，实变函数论与泛函分析概要（第二版），上海科技出版社，1960。

〔5〕 河田龙夫，富里埃变换和拉普拉斯变换（中译本，钱端壮译），上海科技出版社，1661。

〔6〕 S.Saks, Theory of Integral, Warzawa-Lwaw, 1937.

〔7〕 D.V.Widder, The Laplace Transform, Princeton University, Princeton, 1946.

〔8〕 侯振挺，Q过程的唯一性准则，中国科学，2(1974)，115—130.

〔9〕 侯振挺，郭青峰，齐次可列马尔可夫过程，科学出版社，1978.

〔10〕 钱敏，侯振挺等，可逆马尔可夫过程，湖南科技出版社，1979.

〔11〕 G.E.H.Reuter, Denumerable Markov Processes and the Associated Semigroup on l, Acta.Math., 97(1957),1—46.

〔12〕 G.E.H.Reuter, Denumerable Markov Processes II, J. London Math.Soc., 34(1959), 81—91.

〔13〕 G.E.H.Reuter, Denumerable Markov Processes III, ibid, 37(1962), 64—73.

〔14〕 G.E.H.Reuter, Denumerable Markov Processes IV, On C.T.Hou's Uniquness Theorem for Q-semigroups, Zeitsc-

hrift für Wahrscheinlichkeits Theovie, 33(1976),309—315

〔15〕 D.Williams,The Q-Matrix Problem, Séminaire de Probadilités X, Lecture Notes,1976,216—234.

〔16〕 D. Williams, The Q-Matrix Prodlem 2, Kolmogorov Backward Equations,ibid,505—520.

〔17〕 D.Williams, The Q-Matrix Problem 3,The Lery-kenrel Prodlem for Chains,To appear.